Diurno, Alimentos, P1-2017

1) Resolva o problema de valor de contorno

$y''(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$.

Sol.: Procuramos uma solução da forma $y(x) = e^{rx}$

Troca $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 + 1 = 0$ Eq. Auxiliar

$r = \pm 1i = \alpha + \pm \beta i$ Tipo III

$\alpha = 0$ e $\beta = 1$

$y_{gh}(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$, C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

Usando a primeira restrição: $y(0) = 0$

$0 = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + C_2 \cancel{\operatorname{sen}}^{0}(0)$

$\boxed{0 = C_1}$

Usando a segunda restrição: $y(\pi) = 0$

$0 = C_1 \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + C_2 \cancel{\operatorname{sen}}^{0}(\pi)$

$\boxed{C_1 = 0}$

Logo, $C_1 = 0$ e não existe nenhuma restrição para C_2.

Isto é, existem <u>infinitas soluções</u>

$$\boxed{y_{P.V.C.}(x) = C_2 \operatorname{sen}(x) , \quad C_2 \in \mathbb{R}}$$

2) Resolva a equação diferencial não homogênea

$$y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = x.$$

Sol.: $y''(x) - 3y'(x) - 10y(x) = 0$ Eq. Dif. Homogênea Correspondente

Propomos uma solução da forma $y(x) = e^{rx}$

e trocamos $y'' \to r^2$

$y' \to r$

$y \to 1$

$r^2 - 3r - 10 = 0$ Eq. Auxiliar

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} = \begin{cases} r_1 = 5 \\ r_2 = -2 \end{cases}$$

Tipo I

$\boxed{5 \times (-2) = -10 \\ 5 + (-2) = 3}$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1 \text{ e } C_2 \in \mathbb{R}}$$

Para encontrar a solução geral da eq. dif. não homogênea precisamos de uma solução particular ($y_p(x)$) da eq. não homogênea. Seja esta da forma

$y_p(x) = Ax + B$

$y_p'(x) = A$

$y_p''(x) = 0$

Substituindo na eq. dif. não homogênea

$$\underbrace{y''(x)}_{0} - 3\underbrace{y'(x)}_{A} - 10\underbrace{y(x)}_{Ax+B} = x$$

$$0 - 3A - 10(Ax + B) = x$$

$$-10A\,x + (-3A - 10B) = 1 \cdot x + 0$$

igualdade de polinômios

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ -3A - 10B = 0 \end{cases} \xrightarrow{①} \boxed{A = -\frac{1}{10}} \xrightarrow{②}$$

$$-3\left(-\frac{1}{10}\right) = 10B$$

$$\boxed{B = \frac{3}{100}}$$ logo

$$y_p(x) = -\frac{1}{10}x + \frac{3}{100}$$ e

$$y_{g.n.h.}(x) = y_{g.h.}(x) + y_p(x)$$

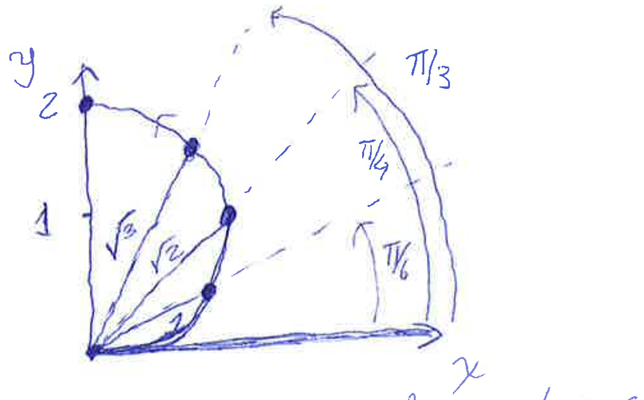
$$y_{g.n.h.}(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{10}x + \frac{3}{100} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3) Esboce a curva com a equação polar $r(\theta) = 2\,sen(\theta)$.

Sol.:

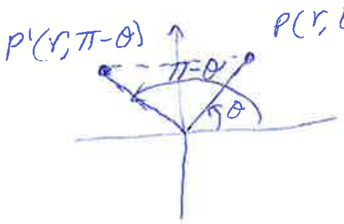
θ	r
0	0
$\pi/6$	$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
$\pi/4$	$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
$\pi/3$	$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
$\pi/2$	$2 \cdot 1 = 2$

$r(\theta) = 2\,sen(\theta)$



Vamos estudar as simetrias em coordenadas polares

i) Em relação ao eixo y

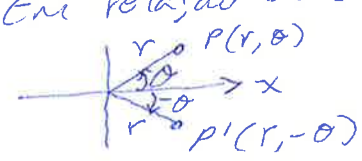


$r(\theta) = 2\,sen(\theta)$

$r(\pi-\theta) = 2\,sen(\pi-\theta) = -2\,sen(-\theta) = 2\,sen(\theta)$

Como $r(\theta) = r(\pi-\theta)$ existe simetria em relação ao eixo y.

ii) Em relação ao eixo x (polar)



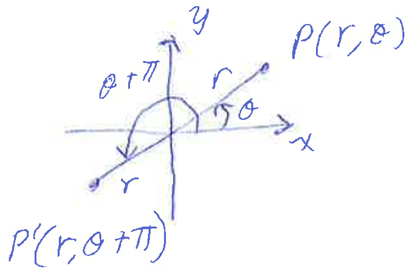
$r(\theta) = 2\,sen(\theta)$

$r(-\theta) = 2\,sen(-\theta) = -2\,sen(\theta) = -r(\theta)$

Logo, não existe simetria em relação ao eixo x.

4

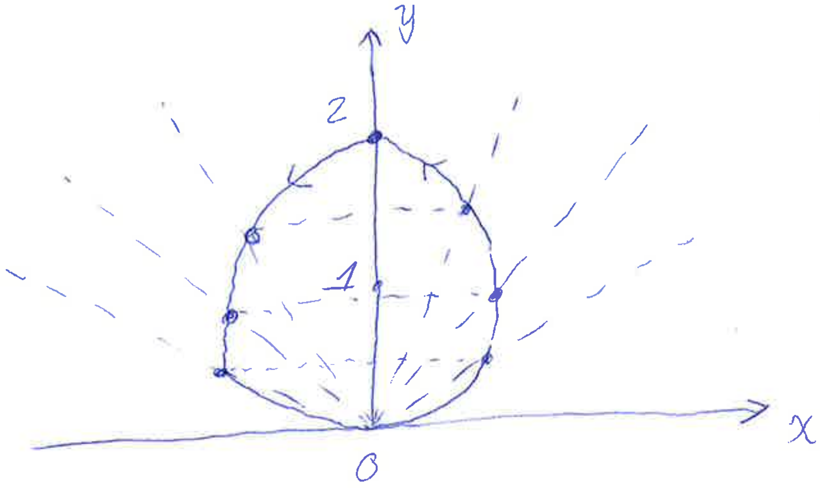
iii) Em relação ao Pólo



$r(\theta) = 2\,sen(\theta)$

$r(\theta+\pi) = 2\,sen(\theta+\pi) = -2\,sen(\theta) = -r(\theta)$

Logo, não existe simetria em relação ao Pólo.



Usando a simetria em relação ao eixo y

Podemos transformar a eq. de polares para cartesianas para mostrar que a curva é uma circunferência.

$r = 2\,sen(\theta)$ curva

Temos que (I) $x = r\cos(\theta)$ (III) $r^2 = x^2 + y^2$

(II) $y = r\,sen(\theta)$ (IV) $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$

Logo, de (II) $sen(\theta) = y/r$. Subtituindo na curva eq. da curva

$r = 2\,sen(\theta)$

$r = 2\dfrac{y}{r}$

$r^2 = 2y$

Usando (III) encontramos

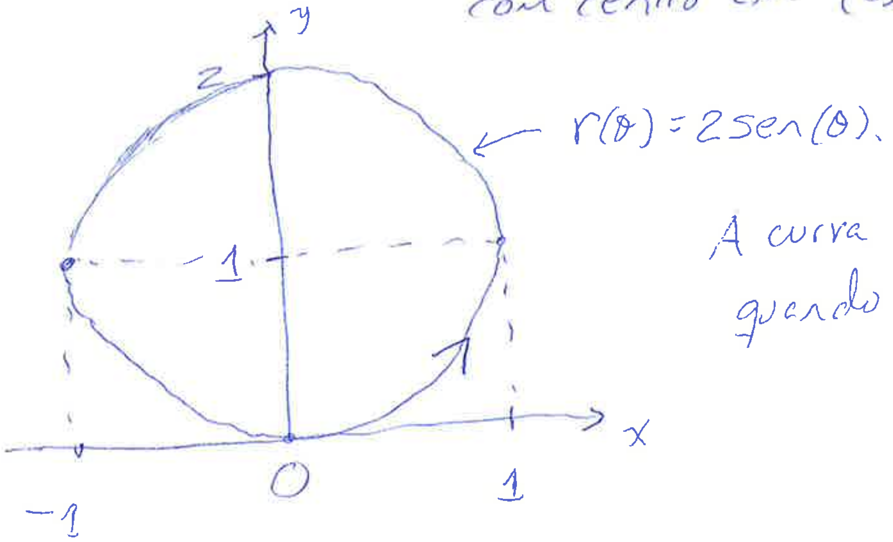
$x^2 + y^2 = 2y$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$

Completando quadrados em y

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ Eq. de uma Circunferência com centro em $(0,1)$ e raio 1.



A curva dá uma volta completa quando θ muda entre 0 e π.

4) Determine se a série converge ou diverge (justifique). Se ela convergir, encontre a soma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Sol.: A série dada é o exemplo padrão de série telescópica e foi discutida no vídeo 114 - "Série Telescópica".

Temos que o termo n-ésimo da sequência geradora da série é $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Decompondo a fração em frações parciais

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)}$$

$$1 = (A+B)n + A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \boxed{A=1} \end{cases} \Rightarrow A = -B \text{ e } \boxed{B=-1}$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Logo, a sequência das somas parciais será

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$(S_n) = \Big(\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{S_1},\ \underbrace{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}}_{S_2 = 1-\frac{1}{3}},\ \underbrace{1-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}}_{S_3 = 1-\frac{1}{4}},\ \ldots,\ \underbrace{S_n = 1-\frac{1}{n+1}}_{\text{Fórmula Fechada para } S_n.},\ \ldots\Big\}$$

Neste caso é possível escrever uma fórmula fechada para S_n,

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow$$ A série é convergente e sua soma é 1.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1}$$

5) Determine e justifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5+n}$$

<u>Sol.:</u> A série associada com o módulo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5+n}$ é divergente pelo teste da comparação no limite com a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmônica que sabemos que é divergente. Isto é, seja $a_n = \frac{1}{5+n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, temos que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5+n}\cdot n\right) = 1$ (finito).

Como o limite anterior existe (é finito) então as duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum \frac{1}{5+n}$ tem o mesmo comportamento no infinito (são divergentes). Logo, a série $\sum \frac{(-1)^n}{5+n}$ não é absolutamente convergente.

Por outro lado, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é alternada. Escrevendo na forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ temos que $b_n = \frac{1}{5+n}$. Usando o Teorema (ou teste) da Série Alternada verificamos que b_n é decrescente ($b_{n+1} < b_n$, $\forall n \geq 1$) e $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5+n}\right) = 0$.

Logo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é convergente.

Como, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é convergente, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{5+n}\right|$ é divergente temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ é CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.