P1 - Biossistemas - 2017 (1)

1) Resolva o problema do valor inicial

$y''(x) - y'(x) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

Sol.:

$y''(x) - y'(x) = 0$ Eq. Dif.

Trocar $y'' \to r^2$
$y' \to r$
$y \to 1$

Após uma proposta de solução do tipo $y(x) = e^{rx}$.

$r^2 - r = 0$ Eq. Auxiliar

$r(r-1) = 0$

$r_1 = 0$ e $r_2 = 1$, Tipo I., $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$

$y_{gh}(x) = C_1 \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 e^{1 \cdot x}$, C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 + C_2 e^x}$$

- Usando a primeira restrição: $y(0) = 2$

$2 = C_1 + C_2 \overbrace{e^0}^{1}$

$\boxed{C_1 + C_2 = 2}$ (I)

- Derivando $y_{gh}(x)$.

$y'_{gh}(x) = C_2 e^x$

- Avaliando a segunda restrição: $y'(0) = 1$

$1 = C_2 e^0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 1}$ (II)

Substituindo (II) em (I)

$$1 + C_1 = 2$$

$$\boxed{C_1 = 1}$$

$$\boxed{y_{P.V.I}(x) = 1 + e^x}$$

2) (a) Esboce a curva utilizando as eq. paramétricas para traçar os pontos. Indique com uma seta a direção na qual a curva é traçada conforme t aumenta. (b) Elimine o parâmetro para encontrar a eq. cartesiana da curva.

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Sol.: (a) - Não existem restrições em t, logo $-\infty < t < \infty$

- $x(-t) = x(t) \Rightarrow$ par em relação a t

$y(-t) = -y(t) \Rightarrow$ ímpar " " a t

$$\lim_{t \to \pm\infty} [x(t)] = \lim_{t \to \pm\infty} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = -1$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} [y(t)] = \lim_{t \to \pm\infty} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) = 0$$

Valores de t simples de calcular

$t=0 \Rightarrow x(0) = 1$, $y(0) = 0$

$t = 1 \Rightarrow x(1) = 0$, $y(1) = 1$

$t = -1 \Rightarrow x(-1) = x(1) = 0$, $y(-1) = -y(1) = -1$

Outros valores de t

$$t = 2 \Rightarrow x(2) = \frac{1-2^2}{1+2^2} = \frac{-3}{5}$$

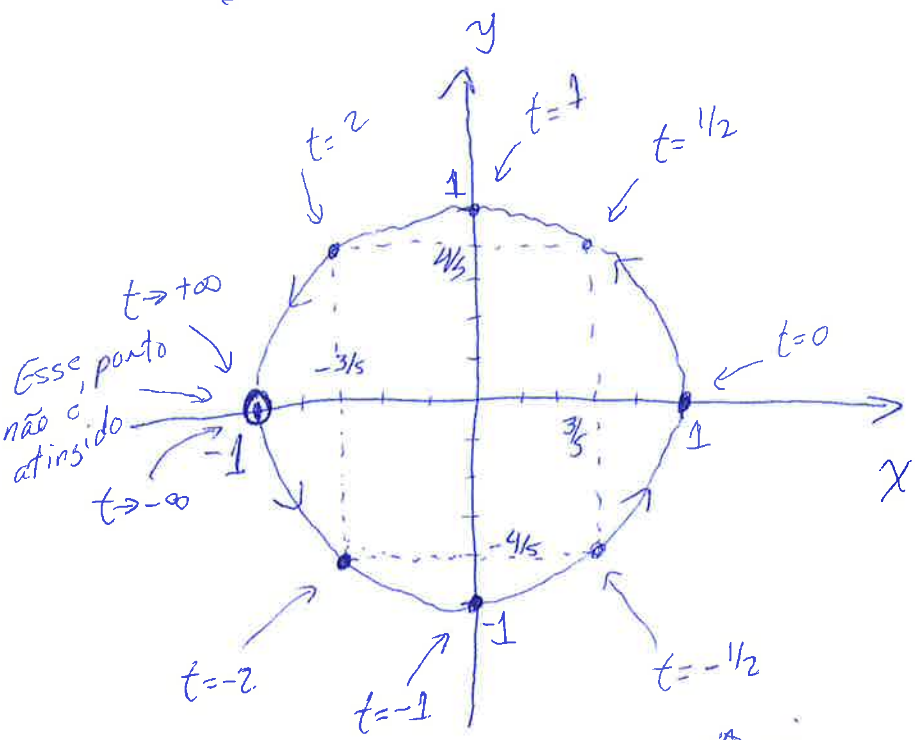
$$y(2) = \frac{2 \cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow x\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5}$$

$$y(1/2) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$$

sentido crescente de t $\downarrow$

t	x	y
$-\infty$	-1	0
-2	$-3/5$	$-4/5$
-1	0	-1
$-1/2$	$3/5$	$-4/5$
0	1	0
$1/2$	$3/5$	$4/5$
1	0	1
2	$-3/5$	$4/5$
$+\infty$	-1	0



Parece uma circunferência. será?

(b) Tarefa: Eliminar o parâmetro

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}$$

- mesmo denominador
- $x+y$ não elimina o parâmetro: $x+y = \dfrac{1+2t-t^2}{1+t^2}$
- Que tal x^2+y^2?

$$x^2 = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad y^2 = \frac{(2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$x^2+y^2 = \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$x^2+y^2 = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

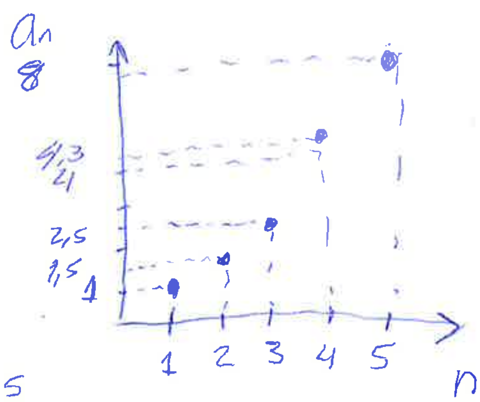
$x^2+y^2=1 \Leftarrow$ Eq. de uma circunferência de raio 1 e centrada em $(0,0)$

3) Escreva os cinco primeiros termos da sequência e determine se é convergente ou divergente (Justifique):

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$$

Sol.:

n	a_n
1	$\frac{1}{1!} = 1$
2	$\frac{1\cdot 3}{2!} = \frac{3}{2} = 1,5$
3	$\frac{1\cdot3\cdot5}{3!} = \frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}\cdot 2} = \frac{5}{2} = 2,5$
4	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4!} = \frac{\cancel{3}\cdot5\cdot7}{4\cdot\cancel{3}\cdot2} = \frac{35}{8} \approx 4,3$
5	$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{5!} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot7\cdot9}{\cancel{5}\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot2} = \frac{63}{8} \approx 7,8$



$$a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$$

trocando $n \to n+1$

$2(n+1)-1 = 2n+2-1$
$= 2n+1$

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{(n+1)!}$$

$(n+1)! = (n+1)n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}(2n+1)}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1} > 1, \ \forall n \geq 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = 2$$

ou

$$\cancel{2}n + \cancel{1} > \cancel{n} + \cancel{1} \quad \forall n \geq 1$$

$$n > 0 \quad \forall n \geq 1$$

A sequência a_n é crescente $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n\right)$ $\forall n \geq 1$.

é ilimitada superiormente. Isto é, $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ (não existe)

A sequência é DIVERGENTE.

4) Determine e justifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Sol.: A sequência geradora da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. A série associada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}_{\text{Série Harmônica Divergente}}$.

Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ NÃO é Absolutamente Convergente.

Por outro lado, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é uma série alternada com $b_n = \frac{1}{n}$. A sequência b_n é decrescente e
($b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $n+1 > n$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow b_{n+1} < b_n$, $\forall n \geq 1$)
e $\lim_{n\to\infty} (b_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Logo, pelo Teste da Série Alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente. Como a série converge, porém a série do módulo diverge temos que $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{\text{Série Harmônica Alternada}}$ é CONDICIONALMENTE CONVERGENTE.

5) Encontre uma representação em série de potências para a função e determine o intervalo de convergência:

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

<u>Sol.:</u> A série geométrica (S.G.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$$

é convergente se $|q| < 1$. Trocando $a = 1$ e $q = x$ encontramos $\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n$. Se $|q| < 1$ a soma da S.G. é $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{1}{1-q}$

Logo, $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{se } |x|<1}$

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = x\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{se } |x|<1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \quad \text{se } |x|<1.$$

O raio de convergência é 1. $(R=1)$.

Vamos analizar os extremos $x=-1$ e $x=1$ por separado.

- Se $x=-1 \Rightarrow f(-1) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}}_{\text{Divergente pelo Teste da Divergência}}$

  $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ não existe.

- Se $x=1 \Rightarrow f(1) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (1)^{n+1}}_{\text{Divergente pelo Teste da Divergência}}$

  $\lim_{n\to\infty} [(1)^n] = 1 \neq 0$

Logo, o intervalo de convergência não inclue os extremos:

$$I = (-1, 1)$$