Cálculo II, Biossistemas, P1 - 2018 (1)

1) Resolva a equação diferencial não homogênea $y''(x) - y'(x) = e^x$.

Sol.: Vamos resolver primeiro a eq. homogênea correspondente

$y''(x) - y'(x) = 0$

Propomos uma solução do tipo $y(x) = e^{rx}$, r um parâmetro a ser determinado

Isso leva a trocar $\begin{cases} y''(x) \to r^2 \\ y'(x) \to r \\ y(x) \to 1 \end{cases}$

$r^2 - r = 0$ Eq. Caraterística

$r(r-1) = 0$

$\boxed{r_1 = 0}, \boxed{r_2 = 1}$

$y_{gh}(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1 \cdot x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$\boxed{y_{gh}(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x}$ $\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 1 \\ y_2(x) = e^x \end{cases}$ Soluções da base do espaço vetorial das soluções da eq. h

Agora devemos fazer uma proposta de solução particular $(y_p(x))$ da eq. não homogênea).

$\cancel{y_p(x) = Ae^x}$ Esta não funciona pois $y_2(x) = e^x$ é uma das soluções da base da eq. homogênea

Logo, modificamos a proposta

(I) $y_p(x) = Axe^x$

Derivando

(II) $y_p'(x) = A[e^x + xe^x] = Ae^x[1+x]$

(III) $y_p''(x) = A[e^x[1+x] + e^x] = Ae^x[2+x]$

Substituindo (II) e (III) em $y''(x) - y'(x) = e^x$

temos

$$Ae^x[2+x] - Ae^x[1+x] = e^x$$

Como $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ podemos dividir por e^x

$$A[2+x] - A[1+x] = 1$$

$$2A + \cancel{Ax} - A - \cancel{Ax} = 1$$

$$\boxed{A = 1}$$

$\therefore \boxed{y_p(x) = xe^x}$ ← Solução Particular da Não H.

A solução geral da eq. não homogênea dada é

$$y_{g.n.h.}(x) = y_{g.h.}(x) + y_p(x)$$

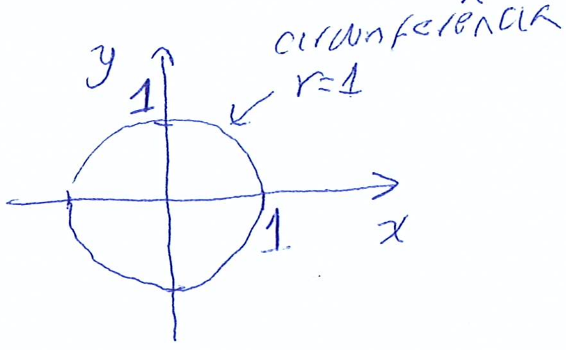
$$\boxed{y_{g.n.h.}(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 e^x + xe^x}$$

---

2) Encontre a área fora da curva polar $r=1$ e dentro da curva polar $r = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(\theta)$.

Sol.: Este problema está resolvido no vídeo 69.

A eq. polar $r = 1$ significa uma circunferência de raio 1 e centrada na origem.



A equação polar $r = \frac{3}{2}\,\text{sen}(\theta)$ vamos transformar (3)
a coordenadas cartesianas.

Como $\boxed{\begin{array}{ll} x = r\cos(\theta) & r^2 = x^2 + y^2 \\ y = r\,\text{sen}(\theta) & \tan(\theta) = y/x \end{array}}$ vamos escrever

$\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$ e substituir em $r = \frac{3}{2}\,\text{sen}(\theta)$

$$r = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$r^2 = \frac{3}{2}y$$

Agora, usando que $r^2 = x^2 + y^2$ temos

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}y$$

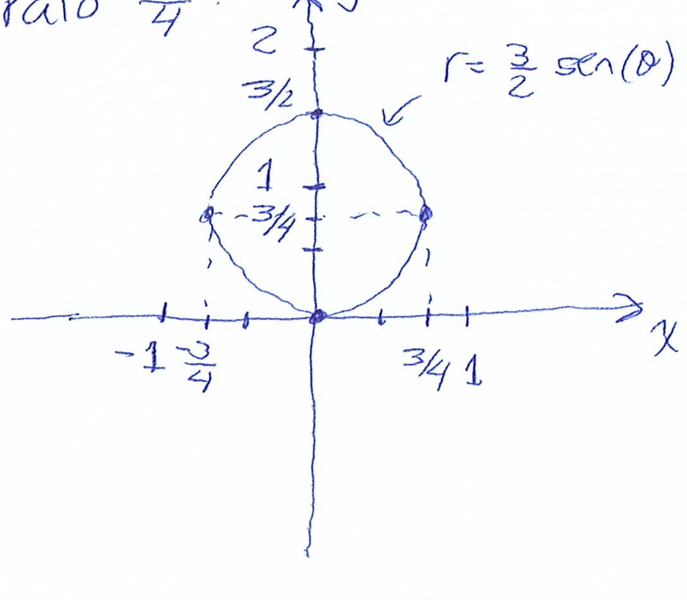
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}y = 0$$

Completando quadrados em y

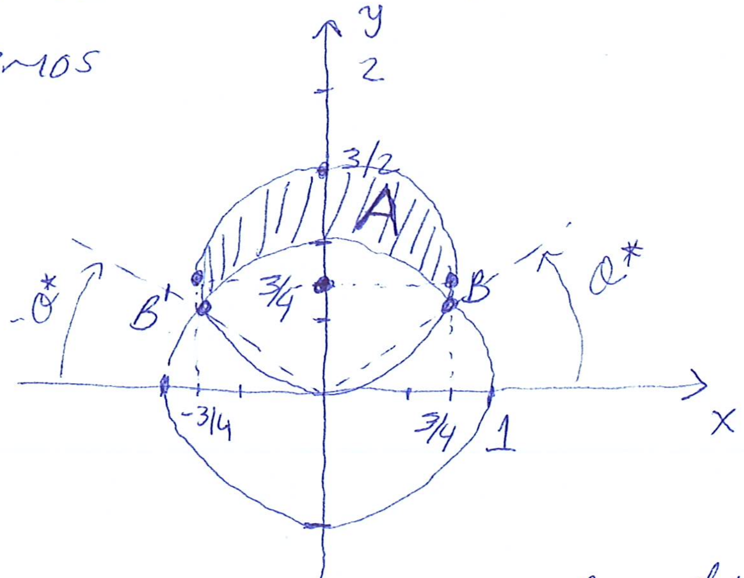
$$x^2 + \underbrace{y^2 - \frac{3}{2}y + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\boxed{x^2 + \left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

Eq. de uma circunferência
com centro em $(0, 3/4)$ e
raio $\frac{3}{4}$.



Colocando as duas circunferências no mesmo gráfico temos

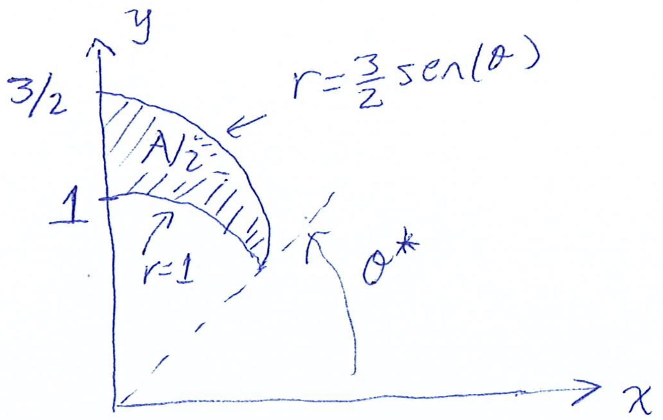


Sejam B e B' as interceções das duas circunferências. Esses pontos pertecem as duas curvas. Isto é, quando $\theta = \theta^*$ temos $\begin{cases} r = 1 \\ r = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(\theta^*) \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}(\theta^*)$

$\mathrm{sen}(\theta^*) = \frac{2}{3}$

$\theta^* = \mathrm{Arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)$

Pela simetria em relação ao eixo y temos



A fórmula para calcular áreas em polares é

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta$$

No nosso problema será a diferença entre duas curvas

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\theta^*}^{\pi/2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 \mathrm{sen}^2(\theta) - 1^2\right] d\theta$$

$$A = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \int_{\theta^*}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta - \int_{\theta^*}^{\pi/2} d\theta$$

Sabemos que $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

$$A = \frac{9}{4} \int_{\theta^*}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\, d\theta - \theta \Big|_{\theta^*}^{\pi/2}$$

$$A = \frac{9}{8}\left[\int_{\theta^*}^{\pi/2} d\theta - \int_{\theta^*}^{\pi/2} \cos(2\theta)\, d\theta\right] - \left(\pi/2 - \theta^*\right)$$

$$A = \frac{9}{8}\left[\left(\pi/2 - \theta^*\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\Big|_{\theta^*}^{\pi/2}\right] - \left(\pi/2 - \theta^*\right)$$

$$A = \frac{9\pi}{16} - \frac{9\theta^*}{8} - \frac{9}{16}\left(\cancelto{0}{\operatorname{sen}(\pi)} - \operatorname{sen}(2\theta^*)\right) - \left(\pi/2 - \theta^*\right)$$

$$A = \underbrace{\frac{9\pi}{16} - \frac{\pi}{2}}_{\pi/16} - \underbrace{\frac{9\theta^*}{8} + \theta^*}_{-\frac{\theta^*}{8}} + \frac{9}{16}\operatorname{sen}(2\theta^*)$$

$$\boxed{A = \frac{\pi}{16} - \frac{\theta^*}{8} + \frac{9}{16}\operatorname{sen}(2\theta^*)}$$

3) Determine se a sequência converge ou diverge. Justifique sua resposta. Se ela convergir, encontre o limite.

$$a_n = \frac{n\cos(n)}{n^2+1}$$

Sol.: Note que $|\cos(n)| \leq 1$ pois

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

Logo, $|a_n| = \left|\frac{n}{n^2+1}\cos(n)\right| = \left|\frac{n}{n^2+1}\right| |\cos(n)| \leq \left|\frac{n}{n^2+1}\right|$

Isto é, $|a_n| \leq \frac{n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\frac{n}{n^2+1} > 0$

Calculando limite nos dois lados

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n|) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}\right) = 0$$ (A potência no denominador é maior)

Como $|a_n| \geq 0$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}(|a_n|) = 0$$

Usando o Teorema do Módulo para sequências (V95) temos que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$$

A sequência (a_n) converge e seu limite quando $n \to \infty$ é zero.

4) Determine se a série converge ou diverge. Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$$

Sol.: - Note que $\frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{n^1}{n^{5/2}} = n^{1-5/2} = n^{2/2-5/2} = n^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$

- Sejam $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}}$. Temos a_n e $b_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- A série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série-p com $p = 3/2 > 1$, logo convergente.

- Vamos usar o Teste de Comparação no Limite com as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n/\sqrt{n^5+4}}{1/n^{3/2}} = \frac{n^1 \cdot n^{3/2}}{\sqrt{n^5+4}} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{n^5+4}} = \frac{n^{5/2}}{\sqrt{n^5(1+\frac{4}{n^5})}}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\cancel{n^{5/2}}}{\cancel{n^{5/2}}\sqrt{1+4/n^5}} = \frac{1}{\sqrt{1+4/n^5}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+4/n^5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\lim_{n\to\infty}(4/n^5)}_{0}}} = 1$$

Como o limite existe as duas séries, $\sum a_n$ e $\sum b_n$, tem o mesmo comportamento. Isto é, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$ é convergente.

- Também pode ser usado o Teste da Comparação com $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5}}$. Como $\sqrt{n^5+4} > \sqrt{n^5} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^5+4}} < \frac{n}{\sqrt{n^5}}$.

continua

Isto é, $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Como a série com sequência geradora maior ($\sum b_n$) é uma série-p ($p = 3/2$) convergente então a série ($\sum a_n$) com sequência geradora menor também é convergente.

5) Qual o raio (R) e o intervalo (I) de convergência da série de potências:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$$

Sol.: Vamos usar o Teste da Razão

$$a_n = \frac{x^n}{\ln(n)} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}/\ln(n+1)}{x^n/\ln(n)}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| \left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{x^n} x}{\cancel{x^n}}\right| \left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| = |x| \left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right|$$

$$(I) \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| \left|\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| = |x| \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right)}_{*}$$

* Seja $x \in \mathbb{R}$ e $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = h(x)$. Como $h(x)$ é derivável podemos usar L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1/x}{1/x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = 1.$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x \in \mathbb{R}}} \left[\frac{\ln(x)}{\ln(x+1)}\right] = 1$ temos que $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \left[\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right] = 1$

(Veja vídeo 93)

Voltando em (I) temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| = L$$

Pelo Teste da Razão para a série ser convergente devemos ter $L<1$. Isto é,

$$|x| < \boxed{1 = R} \text{ Raio de Convergência}$$

- Se $-1 < x < 1$ a série será absolutamente convergente e se $|x|>1$ a série será divergente.
- Vamos testar os dois extremos i) $x=-1$ e ii) $x=1$

i) $x=-1$
A série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$ se transforma em $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

Seja $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n b_n$. Temos uma série alternada com $b_n = \frac{1}{\ln(n)}$. Como $\lim_{n\to\infty}(\ln(n)) = \infty$ temos $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) = 0$. Adicionalmente, $\ln(n)$ é crescente quando n aumenta. Logo, b_n é uma sequência decrescente. Pelo teste da série alternada temos que $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ é convergente.
Veremos em ii) que é condicionalmente convergente.

ii) $x=1$
A série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln(n)}$ se transforma em $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n)}$

Note que $n > \ln(n)$ $\forall n \geq 2$. Logo $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n)}$ $\forall n \geq 2$. Sejam $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$ e $b_n = \frac{1}{n}$.

continua

Temos que $b_n \leq a_n \ \forall n \geq 2$. Como a série $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica que é divergente e a sequência geradora de $\sum a_n$ é maior que a sequência geradora de $\sum b_n$, pelo teste da comparação, temos que a série $\sum a_n$ também é divergente.

Resumindo, o intervalo de convergência é

$I = [-1, 1)$ ou $-1 \leq x < 1$, $x \in \mathbb{R}$.