EAN-P1, 15/10/2019, Cálculo II, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: ____ Número USP: ___________

1) Resolva, se possível, o problema de valor de fronteira $y´´(x) + y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y(\pi) = 0$.

Solução:
Proponha uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx} \tag{1}$$

para a equação diferencial:

$$y´´(x) + y(x) = 0. \tag{2}$$

Onde r é um parâmetro a ser determinado. Derivando duas vezes (1) e substituindo em (2) encontramos o polinômio caraterístico:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r^2 = -1 = i^2$$

As raízes são número complexos (Tipo III):

$$r = \pm i = \alpha \pm \beta i$$

Isto é, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$. Segue que a solução geral de (2) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 cos\left(x\right) + C_2 sen\left(x\right).$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$. Usando a primeira restrição $y(0) = 1$ temos:

$$1 = C_1 cos\left(0\right) + C_2 sen\left(0\right)$$

$$C_1 = 1. \tag{3}$$

Agora aplicamos a segunda restrição $y(\pi) = 0$:

$$0 = C_1 cos\left(\pi\right) + C_2 sen\left(\pi\right) \tag{4}$$

$$C_1 = 0. \tag{5}$$

Como os valores encontrados em (3) e (5) são diferentes não existe solução para o Problema de Valor de Contorno.

2) As coordenadas cartesianas de um ponto são fornecidas, encontre as coordenadas polares (r, θ), onde $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Ponto: $(3, -\sqrt{3})$.

Solução:
Como $r \geq 0$ devemos usar

$$r\left(x, y\right) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r\left(3, -\sqrt{3}\right) = \sqrt{3^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Por outro lado temos que

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

A tangente do ângulo notável $\frac{\pi}{6}$ é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como o ponto dado em cartesianas é do quarto quadrante e $0 \leq \theta < 2\pi$ temos que

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$

Logo, as coordenadas polares do ponto dado são $\left(2\sqrt{3}, \frac{11}{6}\pi\right)$.

3) Expresse o número $7,1232323...$ como uma razão de número inteiros.

Solução-1:

Podemos escrever o número dado como uma série:

$$7,1232323... = 7,1 + 0,023 + 0,00023 + 0,0000023 + \cdots = 7,1 + 23 \cdot 10^{-3} + 23 \cdot 10^{-5} + 23 \cdot 10^{-7} + \cdots$$

$$7,1232323... = 7,1 + 23 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots\right) \tag{6}$$

A expressão entre parêntesis pode ser escrita para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 0$, como:

$$1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots = 10^{0} + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-2n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Temos que

$$a_{n+1} = 10^{-2(n+1)} = 10^{-2n-2}$$

E a razão constante q (não depende de n) entre termos consecutivos da sequência geradora (a_n):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{-2n-2}}{10^{-2n}} = 10^{-2} = \frac{1}{100} = q$$

Logo, a sequência (a_n) é uma progressão geométrica e a série correspondente uma série geométrica. Como $\mid q \mid < 1$ a série geométrica é convergente e podemos calcular sua soma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-2n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

Substituindo o resultado anterior em (6) temos

$$7,1232323... = 7,1 + 23 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{99}$$

$$7,1232323... = 7,1 + \frac{23}{990} = \frac{71}{10} + \frac{23}{990} = \frac{71 \cdot 99 + 23}{990} = \frac{7029 + 23}{990} = \frac{7052}{990} = \frac{3526}{495}.$$

Solução-2:

Seja $x = 7,1232323...$Multiplicando x por 1000 e 10 temos:

$$1000x = 7123,232323...$$

$$10x = 71,232323...$$

Subtraendo a segunda equação da primeira desaparece a dízima periódica:

$$990x = 7123 - 71 = 7052$$

$$x = 7,1232323... = \frac{7052}{990} = \frac{3526}{495}.$$

4) Um filósofo está inicialmente a uma distância D de uma parede. Todo dia ele caminha a metade do que está faltando para chegar na parede partindo da posição em que terminou o dia anterior. Será que ele chega na parede? Justifique matematicamente.

Solução:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 105: “Série: Um Problema Filosófico”.

Todos os resultados devem ser multiplicados por D para se ajustar ao problema. Resolveremos o mesmo omitindo o fator comum D.

Sejam a_n a distância andada no dia n-ésimo e s_n a distância andada até o dia n-ésimo para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$s_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

A Figura 1 e a Tabela 1 ilustram os primeiros termos das sequências geradora (a_n) e das somas parciais (s_n).

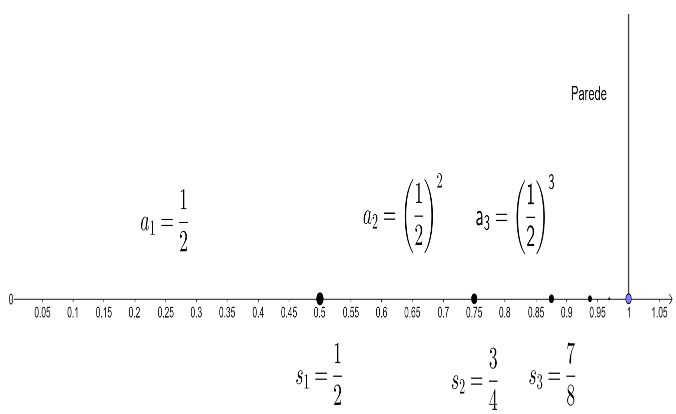

Figura 1: Problema filosófico. Primeiros termos das sequências geradora (a_n) e das somas parciais (s_n).

n	a_n	s_n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{3}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{7}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{2^n-1}{2^n}$

Tabela 1: Problema filosófico. Primeiros termos das sequências geradora (a_n) e das somas parciais (s_n).

Trocando n por $n+1$ em a_n encontramos que

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Podemos calcular a razão entre termos consecutivos da sequência (a_n):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} = q.$$

Como a razão q não depende de n a sequência (a_n) é uma progressão geométrica. A série associada é uma série geométrica com $\mid q \mid < 1$. Logo é convergente e sua soma é:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

A rigor, o filósofo não "chega" nunca na parede. Chega apenas após um número "infinito" de dias. Também pode-se falar que o filósofo se aproxima da parede tanto quanto se queira, bastando para isso esperar um número suficientemente grande de dias.

5) Determine o raio e o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n.$$

Solução:
Esse problema está resolvido na vídeo-aula 131: "Séries de Potências II".
A sequência geradora da série dada é $a_n = n!x^n$. Segue que $a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$. Usaremos o Teste da Razão:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)\cdot n!\cdot x\cdot x^n}{n!x^n}\right| = |(n+1)\cdot x| = (n+1)\,|x|\,.$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)\,|x|\,.$$

O limite anterior somente existe quando $x=0$ e nesse caso o limite é zero. Como $L = 0 < 1$ quando $x = 0$ a série converge. Logo, o raio de convergência da série é zero $(R=0)$ e não existe nenhum intervalo de convergência.