EAD-P1, 09/10/2019, Cálculo II, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: ____ Número USP: ____________

1) Resolva o problema de valor inicial $y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 1$.

Solução:

Proponha uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx} \tag{1}$$

para a equação diferencial:

$$y''(x) - 2y'(x) + 4y(x) = 0. \tag{2}$$

Onde r é um parâmetro a ser determinado. Derivando duas vezes (1) e substituindo em (2) encontramos o polinômio caraterístico:

$$r^2 - 2r + 4 = 0.$$

O discriminante é $\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12$ e as raízes são número complexos (Tipo III):

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i = \alpha \pm \beta i$$

Isto é, $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{3}$. Segue que a solução geral de (2) é

$$y_{g.h.}(x) = e^{x}\left[C_1 cos\left(\sqrt{3}x\right) + C_2 sen\left(\sqrt{3}x\right)\right].$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$. Como as condições iniciais foram dadas no ponto $x_0 = \frac{\pi}{\sqrt{48}} \neq 0$ para facilitar os cálculos vamos promover na solução anterior a troca de x por $x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}$:

$$y_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[D_1 cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + D_2 sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{3}$$

Onde D_1 e $D_2 \in \mathbb{R}$. Usando a primeira restrição $y\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 0$ temos:

$$0 = e^{[0]}\left[D_1 cos\left(0\right) + D_2 sen\left(0\right)\right]$$

$$D_1 = 0 \tag{4}$$

Para continuar derivamos (3) usando a regra do produto e da cadeia:

$$y'_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[\left(D_1 + D_2\sqrt{3}\right) cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + \left(D_2 - D_1\sqrt{3}\right) sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{5}$$

Mas de (4) temos:

$$y'_{g.h.}(x) = e^{\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[D_2\sqrt{3} cos\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right) + D_2 sen\left(\sqrt{3}\left[x - \frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{6}$$

Agora aplicamos a segunda restrição $y'\left(\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right) = 1$:

$$1 = e^{[0]}\left[D_2\sqrt{3} cos\left(0\right) + D_2 sen\left(0\right)\right]. \tag{7}$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \tag{8}$$

Substituindo (4) e (8) em (3) encontramos a solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I.):

$$y_{P.V.I.}(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\left[x-\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[sen\left(\sqrt{3}\left[x-\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]\right)\right]. \tag{9}$$

Note também que $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}\left[x-\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]=\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4}$. Podemos usar a identidade trigonométrica $sen\,(a+b)=sen\,(a)\,cos\,(b)+sen\,(b)\,cos\,(a)$ para escrever:

$$sen\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(\sqrt{3}x\right)cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$sen\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=sen\left(\sqrt{3}x\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\sqrt{3}x\right)$$

$$sen\left(\sqrt{3}x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[sen\left(\sqrt{3}x\right)-cos\left(\sqrt{3}x\right)\right].$$

Com isto outra forma de escrever a mesma solução em (9) é

$$y_{P.V.I.}(x)=\frac{\sqrt{6}}{6}e^{\left[x-\frac{\pi}{\sqrt{48}}\right]}\left[sen\left(\sqrt{3}x\right)-cos\left(\sqrt{3}x\right)\right]. \tag{10}$$

2) Encontre a área da superfície obtida pela rotação da curva fornecida em torno do eixo x:
$x\,(t)=e^t\cos(t)$; $y\,(t)=e^t\sin(t)$ no intervalo $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$.

Solução:
Para encontrar a área da superfície obtida pela rotação da curva fornecida em torno do eixo x devemos usar

$$S=\int_{t_i}^{t_f}2\pi y\,(t)\sqrt{\left[x\,'\,(t)\right]^2+\left[y\,'\,(t)\right]^2}dt.$$

Usando a regra do produto para derivar $x\,(t)=e^t\cos(t)$ temos que

$$x\,'\,(t)=e^t\cos(t)-e^t\sin(t)=e^t\left(\cos(t)-\sin(t)\right).$$

Segue que

$$\left[x\,'\,(t)\right]^2=e^{2t}\left(\cos(t)-\sin(t)\right)^2=e^{2t}\left(\cos^2(t)-2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)\right)$$

$$\left[x\,'\,(t)\right]^2=e^{2t}\left(1-2\cos(t)\sin(t)\right).$$

Por outro lado, usando a regra do produto para derivar $y\,(t)=e^t\sin(t)$ temos que

$$y\,'\,(t)=e^t\sin(t)+e^t\cos(t)=e^t\left(\cos(t)+\sin(t)\right).$$

Segue que

$$\left[y\,'\,(t)\right]^2=e^{2t}\left(\cos(t)+\sin(t)\right)^2=e^{2t}\left(\cos^2(t)+2\cos(t)\sin(t)+\sin^2(t)\right)$$

$$\left[y\,'\,(t)\right]^2=e^{2t}\left(1+2\cos(t)\sin(t)\right).$$

Logo

$$\left[x\,'\,(t)\right]^2+\left[y\,'\,(t)\right]^2=2e^{2t}$$

$$\sqrt{\left[x\acute{}\,(t)\right]^2+\left[y\acute{}\,(t)\right]^2}=\sqrt{2}e^t.$$

Voltando na integral teremos

$$S=\int\limits_{t_i}^{t_f}2\pi y\left(t\right)\sqrt{\left[x\acute{}\,(t)\right]^2+\left[y\acute{}\,(t)\right]^2}dt=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}2\pi e^t\sin(t)\sqrt{2}e^tdt$$

$$S=2\sqrt{2}\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin(t)dt=2\sqrt{2}\pi I. \tag{11}$$

Para calcular a integral I devemos usar a fórmula de integração por partes

$$\int_a^b udv=uv\mid_a^b-\int_a^b vdu.$$

Para tal seja $u=e^{2t}$ e $dv=\sin(t)dt$. Segue que $du=2e^{2t}dt$ e $v=-\cos\left(t\right)$. Logo

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin(t)dt=-e^{2t}\cos\left(t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos(t)dt$$

$$I=1+2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos(t)dt=1+2J. \tag{12}$$

A integral J na equação anterior também deve ser calculada usando integração por partes. Para tal seja agora $u=e^{2t}$ e $dv=\cos(t)dt$. Segue que $du=2e^{2t}dt$ e $v=\sin\left(t\right)$. Logo

$$J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\cos(t)dt=e^{2t}\sin\left(t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin(t)dt$$

$$J=e^{\pi}-2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{2t}\sin(t)dt$$

$$J=e^{\pi}-2I. \tag{13}$$

Substituindo a equação (13) em (12) teremos

$$I=1+2\left(e^{\pi}-2I\right)$$

$$I=\frac{1+2e^{\pi}}{5}. \tag{14}$$

Substituindo a equação (14) em (11) encontramos

$$S=2\sqrt{2}\pi\left(\frac{1+2e^{\pi}}{5}\right).$$

3) Determine se a sequência $a_n=\frac{4n-3}{3n+4}$, com $n\in\mathbb{N}$ e $n\geq 1$, é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

Solução:

Notamos primeiro que $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$. Para conjeturar se os termos da sequência se aproximam no seu limite por baixo ou por cima listamos os primeiros na Tabela 1.

n	a_n
1	$\frac{1}{7}$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{9}{13}$
4	$\frac{13}{16}$

Tabela 1: Primeiros termos da sequência $a_n = \frac{4n-3}{3n+4}$.

Como $\frac{1}{7} < \frac{1}{2} < \frac{9}{13} < \frac{13}{16}$ vamos tentar provar que $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto é, demostraremos que a sequência a_n é estritamente crescente. Suponhamos que,

$$a_{n+1} = \frac{4(n+1)-3}{3(n+1)+4} = \frac{4n+1}{3n+7} > \frac{4n-3}{3n+4} = a_n$$

Como os denominadores na desigualdade anterior são positivos para todo número natural podemos multiplicar cruzado sem que se altere a mesma.

$$(4n+1)(3n+4) > (4n-3)(3n+7)$$

$$12n^2 + 19n + 4 > 12n^2 + 19n - 21$$

$$4 > -21$$

Notamos que chegamos a uma afirmação verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ e equivalente a proposta inicial: $a_{n+1} > a_n$. Logo, demostramos que a sequência a_n é estritamente crescente.

A seguir vamos provar que a sequência é limitada superiormente por $M = \frac{4}{3}$. Isto é, $a_n < \frac{4}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$a_n = \frac{4n-3}{3n+4} < \frac{4}{3}$$

é equivalente a

$$3(4n-3) < 4(3n+4),$$

pois $3n+4 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$12n - 9 < 12n + 16$$

$$-9 < 16.$$

Como a última sentença é verdadeira e equivalente a $a_n < \frac{4}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ concluímos que a sequência em estudo é limitada superiormente. Por outro lado, todos os termos da sequência são positivos, isto é $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.Com isso (a_n) também é limitada inferiormente. Resumindo, a sequência é estritamente crescente e limitada superiormente e inferiormente.

4) Use uma série para mostrar que $0,999\ldots = 1$.

Solução-1:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 109: “Exemplos de Séries Geométricas”.

Temos que

$$0,999\ldots = 9\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + 9\cdot 10^{-3} + \ldots = 9\cdot 10^{-1}\left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \ldots\right)$$

$$0,999\ldots = 9\cdot 10^{-1}\left(10^{-0}+10^{-1}+10^{-2}+\ldots+10^{-n}+\ldots\right)$$

$$0,999\ldots = 9\cdot 10^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}. \tag{15}$$

A sequência geradora da série anterior é $a_n = 10^{-n}$. Segue que $a_{n+1} = 10^{-(n+1)}$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{-n-1}}{10^{-n}} = 10^{-1} = \frac{1}{10} = q.$$

Como a razão entre termos consecutivos da sequência (a_n) é constante (não depende de n) concluímos que a mesma é uma progressão aritmética. Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n}$ é uma série geométrica. Como $\mid q \mid< 1$ a série geométrica é convergente e sua soma é

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(10^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Voltando em (15) encontramos

$$0,999\ldots = 9\cdot 10^{-1}\cdot\frac{10}{9} = 1.$$

Solução-2:
Seja $x = 0,999\ldots$, temos que $10x = 9,999\ldots$. Substraindo a primeira equação da segunda desaparece a dízima periódica:

$$10x - x = 9x = 9.$$

Conclui-se que $x = 1$.

5) Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Solução:
Temos $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ e vamos dividir o estudo em dois casos: i) $\sum_{n=1}^{\infty}\mid a_n\mid$ e ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
i) $\sum_{n=1}^{\infty}\mid a_n \mid = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
A série anterior é uma série p, com $p = \frac{1}{2} < 1$. Sabemos pelo Teste da Integral Imprópria que a série p diverge quando $p \le 1$.
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$.
Neste caso a série é alternada com $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Vamos verificar as duas hipóteses do Teste da Série Alternada.
1) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
2) Como $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$$

Logo, a sequência (b_n) é decrescente. Como valem 1) e 2) a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente pelo Teste da Série Alternada. Como $\sum_{n=1}^{\infty}\mid a_n\mid$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

é condicionalmente convergente.