B-P1, 10/10/2019, Cálculo II, Prof. Juan López Linares

Nome Completo: ____ Número USP: ____________

1) Escreva uma solução particular de teste para o "Método dos Coeficientes Indeterminados" da equação diferencial não homogênea $y´´(x) + 3y´(x) = 1 + xe^{-3x}$. Não determine os coeficientes.

Solução:

Proponha uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx} \tag{1}$$

para a equação diferencial homogênea correspondente:

$$y´´(x) + 3y´(x) = 0. \tag{2}$$

Onde r é um parâmetro a ser determinado. Derivando duas vezes (1) e substituindo em (2) encontramos o polinômio caraterístico:

$$r^2 + 3r = 0$$

$$r\,(r+3) = 0$$

As raízes são número reais e diferentes (Tipo I): $r_1 = 0$ e $r_2 = -3$. Segue que a solução geral de (2) é

$$y_{g.h.}(x) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot e^{-3x}. \tag{3}$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$. Como o termo não homogêneo da equação diferencial que queremos resolver é uma soma devemos procurar duas soluções particulares por separado usando o princípio de superposição. Isto é, uma para cada uma das equações a seguir: i) $y´´(x) + 3y´(x) = 1$ e ii) $y´´(x) + 3y´(x) = xe^{-3x}$.

Caso i) $y´´(x) + 3y´(x) = 1$. O termo não homogêneo é um polinômio de grau zero, logo a proposta de solução inicial seria $y_{pi)}(x) = D \cdot 1$, com D coeficiente indeterminado. Porém, note que $f(x) = 1$ já é uma solução da equação homogênea (3), ou seja, não pode ser solução da equação não homogênea i). Isto leva a mudar a proposta de solução para:

$$y_{p-i)}(x) = D \cdot x.$$

Caso ii) $y´´(x) + 3y´(x) = xe^{-3x}$. O termo não homogêneo é o produto de um polinômio de grau um com uma exponencial, logo a proposta de solução inicial seria $y_{pii)}(x) = (E \cdot 1 + F \cdot x)\, e^{-3x}$, com E e F coeficientes indeterminados. Porém, note que $g(x) = e^{-3x}$ já é uma solução da equação homogênea (3), ou seja, não pode ser solução da equação não homogênea ii). Isto leva a mudar a proposta de solução para:

$$y_{p-ii)}(x) = \left(E \cdot x + F \cdot x^2\right) e^{-3x}.$$

Como $y_p(x) = y_{p-i)}(x) + y_{p-ii)}(x)$ temos que a proposta de solução seria:

$$y_p(x) = D \cdot x + \left(E \cdot x + F \cdot x^2\right) e^{-3x}.$$

2) Elimine o parâmetro para encontrar a equação cartesiana da curva $x = 2cos(\theta)$ e $y = \frac{1}{2}sen(\theta)$ com $0 \le \theta \le 2\pi$.

Solução:

Basta usar a identidade trigonométrica fundamental:

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \tag{4}$$

De $x = 2cos(\theta)$ segue que $cos(x) = \frac{x}{2}$ e de $y = \frac{1}{2}sen(\theta)$ segue que $sen(\theta) = 2y$. Elevando ao quadrado e substituindo em (4) temos

$$\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1 \tag{5}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \tag{6}$$

O gráfico da equação 6 está representado na Figura 1: uma elipse centrada em $(0,0)$ e de raio no semieixo x de 2 e de raio no semieixo y de $\frac{1}{2}$.

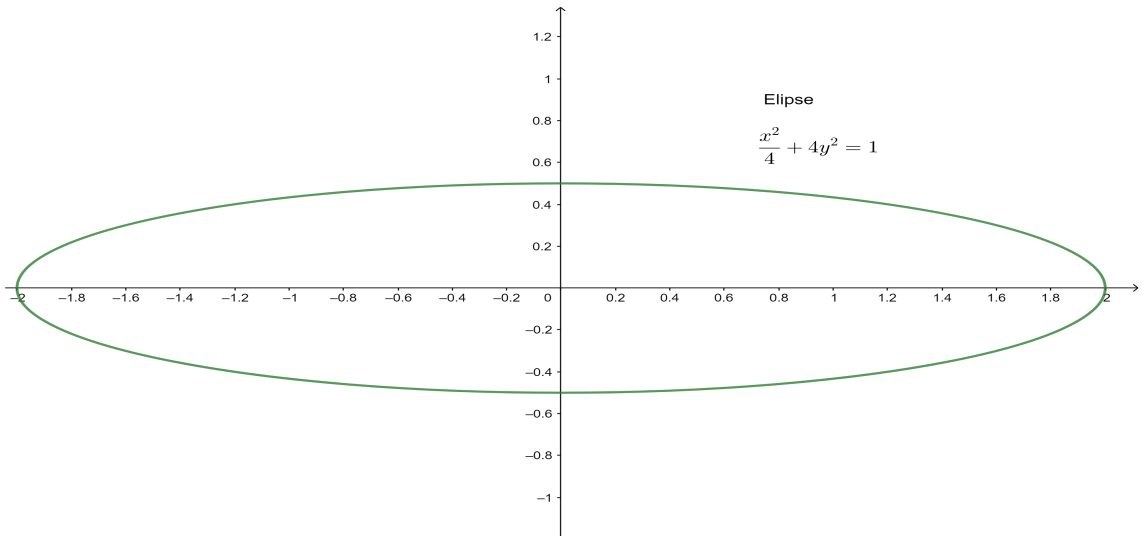

Figura 1: Elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

3) Considere a sequência definida como indicada na Tabela 1 a seguir:

n	a_n
1	0,1
2	0,12
3	0,123
$\vdots$	$\vdots$
9	0,123456789
10	0,12345678910
11	0,1234567891011
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 1: Sequência definida por tabela e verbalmente.

Isto é, dado o termo n-ésimo para construir o termo de ordem $n+1$ adicione os dígitos do número $n+1$ no final da representação decimal de a_n. Essa sequência é convergente ou divergente? Justifique.

Solução:

Esse problema está resolvido na vídeo-aula 103: “Exemplo do uso do Teorema da Sequência Monótona I”.

A sequência dada é convergente pelo Teorema da Sequência Monótona. De fato, a sequência é crescente pois novos dígitos são adicionados do termo n-ésimo para o termo de ordem $n+1$. Adicionalmente vale para todo $n \in \mathbb{N}$ que $a_n < 0,2$.

O Teorema da Sequência Monótona diz que se uma sequência é crescente e limitada superiormente ou decrescente e limitada inferiormente, então a sequência é convergente.

4) Use o "Teste da Integral Imprópria" para determinar se a série é convergente ou divergente? Caso este teste não possa ser usado explique o porque:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + ...$$

Solução:

A série pode ser escrita como

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Sejam $a_n=\frac{1}{n^2}$ e $f(x)=\frac{1}{x^2}$ para todo $n\in\mathbb{N}$, com $n\geq 1$, e $x\in\mathbb{R}$, com $x\geq 1$. A função real f é contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1,+\infty)$. Note que

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}<0,\quad x>0.$$

A Figura 2 mostra o gráfico de f e f':

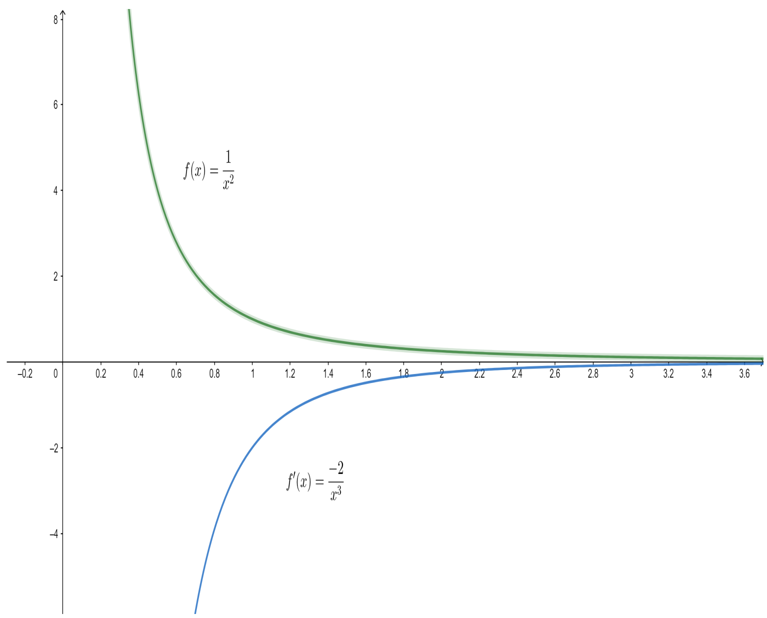

Figura 2: Função do quadrado inverso e sua derivada.

Logo, podemos aplicar o "Teste da Integral Imprópria". Temos

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\left[\int_1^{A}\frac{1}{x^2}dx\right]$$

Vamos calcular a integral própria separadamente:

$$\int_1^{A}\frac{1}{x^2}dx=\int_1^{A}x^{-2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^{A}=-\left(\frac{1}{A}-1\right)=\left(1-\frac{1}{A}\right).$$

Voltando no cálculo da integral imprópria temos

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{A\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{A}\right)\right]=1.$$

Concluí-se que a integral imprópria é convergente e a série associada

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+...$$

também é convergente.

5) Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Solução:
Seja $b_n = \frac{n^2}{n^2+1}$. Notamos que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Temos $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$ e o limite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$$

não existe pois a subsequência dos termos pares tende a 1 e a subsequência dos termos ímpares tende a -1 quando n tende a infinito.

Pelo Teste da Divergência as duas sequências $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ são divergentes.

O Teste da Divergência diz que se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou não existir, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}.$$

é divergente.