Segunda avaliação presencial
Cálculo II
Biossistemas

Prof. Juan López Linares

9 de novembro 2022

1 A11-Sequências

Exercício 1. *A soma de cinco números inteiros múltiplos de três consecutivos é S. Em função de S, qual o menor deles? Exemplo. Para a sequência* $(3, 6, 9, 12, 15)$ *a soma é* 45 *e o menor deles é* 3.

1.1 Resolução do Exercício 1

Cinco múltiplos de 3 consecutivos formam uma sequência do tipo Progressão Aritmética (PA) $a_{n+1} = a_n + r$ de passo $r = 3$:

$$(3n - 6, 3n - 3, 3n, 3n + 3, 3n + 6).$$

A soma dos cinco números inteiros múltiplos de três consecutivos pode ser escrita como:

$$(3n - \cancel{6}) + (3n - \cancel{3}) + 3n + (3n + \cancel{3}) + (3n + \cancel{6}) = S,$$

$$15n = S,$$

para algum $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, S deve ser múltiplo de 15 :

$$n = \frac{S}{15}.$$

O menor número múltiplo de 3 em função de S é:

$$3n - 6 = \frac{3S}{15} - 6 = \frac{S}{5} - 6.$$

2 A18-Representação de Funções como Séries de Potências

Exercício 2. *Qual a representação em séries de potência da função*

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

e para quais valores de x a série converge?

2.1 Resolução do Exercício 2

Sabe-se que:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C. \tag{1}$$

O plano será escrever primeiro a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

como série de potências. Segundo, calcula-se a integral em (1).

A série geométrica é convergente quando $|q| < 1$ e neste caso é possível calcular a soma:

$$a + aq + aq^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Colocando $a = 1$ e trocando q por x escreve-se:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1. \tag{2}$$

Utilizando (2) a função $f(x)$ reescreve-se como:

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n, \quad \left|-x^2\right| < 1,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

Integrando nos dois lados da equação anterior:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx, \quad |x| < 1.$$

Como a série é convergente quando $|x| < 1$ pode-se trocar a ordem entre os símbolos de integração e derivação:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2n} dx, \quad |x| < 1,$$

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Por (1) encontra-se:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Uma resolução em vídeo até o passo anterior encontra-se aqui. Trocando x por $\frac{x}{2}$ segue:

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}, \quad \left|\frac{x}{2}\right| < 1.$$

Logo,

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n+1}}, \quad |x| < 2.$$