Segunda avaliação presencial
Cálculo II
EAN

Prof. Juan López Linares

12 de novembro de 2022

1 A13-Teste da Integral Imprópria

Exercício 1. *Utilizar o "Teste da Integral Imprópria" para determinar se a série*

$$\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{27}+\frac{1}{31}+\cdots$$

é convergente ou divergente?

1.1 Resolução do Exercício 1

Inicia-se procurando uma fórmula para o termo $n-$ésimo da sequência geradora (a_n) da série. Nota-se:

$$23 = 19 + 4,$$

$$27 = 23 + 4,$$

$$31 = 27 + 4.$$

Ou seja, enquanto n é acrescido em uma unidade, o denominador aumenta em quatro. Isto indica que deve aparecer $4n$. Adicionalmente, para $n = 1$ deve-se ter $a_1 = \frac{1}{19}$. Uma solução é:

$$a_n = \frac{1}{4n+15}.$$

Logo, a série dada pode ser escrita como:

$$\frac{1}{19}+\frac{1}{23}+\frac{1}{27}+\frac{1}{31}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+15}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

Trocando-se $n \in \mathbb{N}$ por $x \in \mathbb{R}$ encontra-se a função:

$$f(x) = \frac{1}{4x+15}.$$

Para $x > 1$ a função $f(x)$ é contínua, positiva e decrescente. Isto permite utilizar o Teste da Integral Imprópria. Escreve-se:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{4x+15} = \lim_{\delta\to\infty}\left\{\int_1^\delta \frac{dx}{4x+15}\right\}.$$

Com a mudança de variáveis $u = 4x + 15$ e $du = 4dx$ a integral anterior transforma-se em:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{4}\lim_{\delta\to\infty}\left\{\int_{19}^{4\delta+15} \frac{du}{u}\right\}.$$

Integrando em relação a u encontra-se:

$$\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{4}\lim_{\delta\to\infty}\left\{\ln\left(|u|\right)\Big|_{19}^{4\delta+15}\right\},$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \frac{1}{4}\lim_{\delta\to\infty}\left\{\ln\left(4\delta+15\right) - \ln 19\right\}.$$

Como a função $\ln(x)$ tende a infinito quando $x \to \infty$, o limite anterior não existe. A integral imprópria é divergente e a série associada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ também. Um problema análogo está disponível aqui.

2 A15-Séries Alternadas

Exercício 2. *Determinar se a série*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-3}}{n^{\sqrt{2}-1}}$$

converge ou diverge e explicar o porquê.

2.1 Resolução do Exercício 2

Nota-se que a série dada pode ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-3}}{n^{\sqrt{2}-1}} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-3} b_n.$$

Isto é, tem-se uma série alternada com:

$$b_n = \frac{1}{n^{\sqrt{2}-1}};\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabe-se que $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. Como a sequência b_n é de termos positivos, decrescente e tende a zero quando $n \to \infty$, então pelo "Teste da Série Alternada"

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-3}}{n^{\sqrt{2}-1}}$$

é convergente. Um problema análogo está disponível aqui.