11.8 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

"R" representa "raio da convergência" e "I" representa "intervalo da convergência" nessa seção.

1. Se $a_n = \dfrac{x^n}{n+2}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+3}\cdot\frac{n+2}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} = |x| < 1$$

que converge (pelo Teste da Razão).

Então $R = 1$. Quando $x = 1$, a série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$, que diverge (Teste da Integral ou Teste de Comparação), e quando $x = -1$, é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ que converge (Teste de Série Alternada), logo $I = [-1, 1)$.

2. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/3} = |x| < 1 \text{ para}$$

convergência (pelo Teste da Razão) e $R = 1$. Quando $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$, que é uma série alternada convergente, mas quando $x = -1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$, que é uma série p divergente ($p = \frac{1}{3} < 1$), logo $I = (-1, 1]$.

3. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n x^n}{n2^n}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/[(n+1)2^{n+1}]}{x^n/(n2^n)}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

pela convergência, então $|x| < 2$ e $R = 2$. Quando $x = 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, que converge pelo Teste de Série Alternada. Quando $x = -2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que diverge (série harmônica), logo $I = (-2, 2]$.

4. Se $a_n = n5^n x^n$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 5|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 5|x| < 1.$$

Para convergência (pelo Teste da Razão), temos $R = \frac{1}{5}$. Se $x = \pm\frac{1}{5}$, como $|a_n| = n^2 \to \infty$ quando $n \to \infty$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge pelo Teste para Divergência e $I = \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

5. Se $a_n = nx^n$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x| < 1$$

para convergência (pelo Teste da Razão). Então $R = 1$.

Quando $x = 1$ ou -1, $\lim_{n\to\infty} nx^n$ não existe, logo $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ diverge para $x = \pm 1$. Assim, $I = (-1, 1)$.

6. Se $a_n = \dfrac{x^n}{n^2}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x| < 1$$

para convergência (pelo Teste da Razão), logo $R = 1$.

Se $x = \pm 1$,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que converge ($p = 2 > 1$), logo $I = [-1, 1]$.

7. Se $a_n = \dfrac{3^n x^n}{(n+1)^2}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+2)^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{3^n x^n}\right| = 3|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 = 3|x| < 1$$

para convergência, logo $|x| < \frac{1}{3}$ e $R = \frac{1}{3}$. Quando $x = \frac{1}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que é uma série p convergente ($p = 2 > 1$). Quando $x = -\frac{1}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$, que converge pelo Teste da Série Alternada, logo $I = \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

8. Se $a_n = \dfrac{n^2 x^n}{10^n}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{|x|}{10} < 1$$

para convergência (pelo Teste da Razão), logo $R = 10$. Se $x = \pm 10$, logo $|a_n| = n^2 \to \infty$ quando $n \to \infty$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge (Teste para Divergência) e $I = (-10, 10)$.

9. Se $a_n = \dfrac{x^n}{\ln n}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{x^n}\right|$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \overset{\text{H}}{=} |x|$$

logo $R = 1$. Quando $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$, que diverge porque $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ é a série divergente harmônica. Quando $x = -1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, que converge pelo Teste da Série Alternada.

Então $I = [-1, 1)$.

10. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)2n} = 0 < 1 \text{ para todo } x.$$

Pelo Teste da Razão a série converge para todo x, logo $R = \infty$ e $I = (-\infty, \infty)$

11. Se $a_n = \dfrac{2^n (x-3)^n}{n+3}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{n+4}\cdot\frac{n+3}{2^n(x-3)^n}\right|$$
$$= 2|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+4} = 2|x-3| < 1$$

para convergência, ou $|x-3| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2}$, e $R = \frac{1}{2}$. Quando $x = \frac{5}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+3}$, que converge pelo Teste da Série Alternada. Quando $x = \frac{7}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}$, similar à série harmônica, que diverge. Assim, $I = \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

12. Se $a_n = \dfrac{(x+1)^n}{n(n+1)}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x+1|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = |x+1| < 1 \text{ para}$$

convergência, ou $-2 < x < 0$ e $R = 1$. Se $x = -2$ ou 0, então $|a_n| = \dfrac{1}{n^2+n} < \dfrac{1}{n^2}$, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge uma vez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ também converge ($p = 2 > 1$), e $I = [-2, 0]$.

13. Se $a_n = \sqrt{n}\,(3x+2)^n$, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\sqrt{n+1}\,(3x+2)^{n+1}}{\sqrt{n}\,(3x+2)^n}\right|$$
$$= \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\cdot(3x+2)\right| \to |3x+2| \text{ quando } n\to\infty,$$

então para convergência, $|3x+2| < 1 \Rightarrow \left|x+\frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3}$, logo $R = \frac{1}{3}$ e $-1 < x < -\frac{1}{3}$.

Se $x = -1$, a série se torna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, que é divergente pelo Teste para Divergência. Se $x = -\frac{1}{3}$, a série se torna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}$ que também é divergente pelo Teste para Divergência. Assim, $I = \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$.

14. Se $a_n = \dfrac{n}{4^n}(2x-1)^n$, então

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(2x-1)^{n+1}}{4^{n+1}}\cdot\frac{4^n}{n(2x-1)^n}\right|$$
$$= \left|\frac{2x-1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \to \tfrac{1}{2}\left|x-\tfrac{1}{2}\right| \text{ quando } n\to\infty.$$

Para convergência, $\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right| < 2 \Rightarrow R = 2$ e $-2 < x - \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$. Se $x = -\frac{3}{2}$, a série se torna $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$, que é divergente pelo Teste para Divergência. Se $x = \frac{5}{2}$, a série é $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4^n}4^n = \sum_{n=0}^{\infty}n$, que também é divergente pelo Teste para Divergência. Assim, $I = \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

15. Se $a_n = \dfrac{(-1)^n (x-1)^n}{\sqrt{n}}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x-1)^n}\right|$$
$$= |x-1|\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x-1| < 1$$

para convergência, ou $0 < x < 2$ e $R = 1$. Quando $x = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, que é uma série p divergente ($p = \frac{1}{2} < 1$). Quando $x = 2$, a série é $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, que converge pelo Teste da Série Alternada. Logo $I = (0, 2]$.

16. Se $a_n = \dfrac{(x-4)^n}{n5^n}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-4|}{5} < 1 \text{ para}$$

convergência, ou $-1 < x < 9$ e $R = 5$. Quando $x = 9$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, que diverge (série harmônica) e quando $x = -1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, que converge pelo Teste de Série Alternada, logo $I = [-1, 9)$.

17. Se $a_n = \dfrac{(-3)^n\,(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3\,|x-1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{1/2} = 3\,|x-1| < 1$$

para convergência, ou $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$ e $R = \frac{1}{3}$. Quando $x = \frac{4}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, que é uma série alternada convergente e quando $x = \frac{2}{3}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, que é uma série p divergente ($p = \frac{1}{2} < 1$), logo $I = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$.

18. Se $a_n = \dfrac{(2x-1)^n}{n^3}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |2x-1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = |2x-1| < 1$$

para convergência, logo $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 0 < x < 1$, e $R = \frac{1}{2}$. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{n^3}$ converge tanto para $x = 0$ quanto para $x = 1$ (no primeiro caso devido ao Teste da Série Alternada e no segundo caso porque temos uma série p com $p = 3 > 1$). Logo, $I = [0, 1]$.

19. Se $a_n = \dfrac{nx^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$, então

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\,(2n+1)} = 0 \quad \text{para todo } x.$$

Então a série converge para todo $x \;\Rightarrow\; R = \infty$ e $I = (-\infty, \infty)$.