11.6 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série p convergente ($p = \frac{3}{2} > 1$), logo a série dada é absolutamente convergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ converge pelo Teste da Série Alternada, mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ é uma série p divergente ($p = \frac{1}{2} < 1$), então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ converge condicionalmente.

3. Utilizando o Teste da Razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} / (n+1)^3}{(-3)^n / n^3} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = 3 > 1$$

logo a série diverge.

4. Utilizando o Teste da Razão, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-3)^{n+1} / (n+1)!}{(-3)^n / n!} \right| = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, então a série é absolutamente convergente.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5+n}$ converge pelo Teste da Série Alternada, mas $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+n}$ diverge pelo Teste de Comparação no Limite com a série harmônica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, logo a série dada é condicionalmente convergente.

6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ é absolutamente convergente pelo Teste da Razão.

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverge (utilize o Teste da Integral ou o Teste da Comparação do Limite com $b_n = 1/n$), mas uma vez que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ converge pelo Teste da Série Alternada, logo também é condicionalmente convergente.

8. $\displaystyle\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ($p = 2 > 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge absolutamente pelo Teste de Comparação.

9.
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/[(2n+1)!]}{1/[(2n-1)!]} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)\,2n} = 0, \text{ logo,}$$
pelo Teste da Razão a série é absolutamente convergente.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ diverge (utilize o Teste da Comparação do Limite com $b_n = 1/n$). Mas, uma vez que $0 \le \dfrac{n+1}{(n+1)^2+4} < \dfrac{n}{n^2+4}$ $\Leftrightarrow n^3 + n^2 + 4n + 4 < n^3 + 2n^2 + 5n \Leftrightarrow 0 < n^2 + n - 4$ (que é verdadeiro para $n \geq 2$), e uma vez que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ converge (condicionalmente) pelo Teste da Série Alternada.

11. Sejam $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ e $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, uma vez que $\sum b_n$ diverge ($p = \frac{1}{2} < 1$), então $\sum a_n$ também diverge pelo Teste da Comparação do Limite. Mas $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1/\sqrt{n}} = 0$, logo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ converge pelo Teste da Série Alternada e também é condicionalmente convergente.

12. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-4} = \frac{2}{3}$, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{3n-4}$ diverge pelo Teste para Divergência.

13. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2+1}$ não existe, de modo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2+1}$ diverge pelo Teste para Divergência.

14.
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} / \left[(n+1)\, 3^{n+2}\right]}{2^n / (n\, 3^{n+1})} \right| = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3} < 1$$
logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

15.
$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{5^n / \left[(n+2)^2\, 4^{n+3}\right]}{5^{n-1} / \left[(n+1)^2\, 4^{n+2}\right]} \right| = \frac{5}{4} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^2 = \frac{5}{4} > 1$$
logo a série diverge pelo Teste da Razão.

16. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)\,5^{n+1}\Big/\left[(n+1)\,3^{2(n+1)}\right]}{(n+1)\,5^n/(n3^{2n})}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{5n\,(n+2)}{9\,(n+1)^2} = \frac{5}{9} < 1$

logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

17. $\displaystyle \left|\frac{\operatorname{sen} 2n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge (série p, $p = 2 > 1$),

logo $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2n}{n^2}$ converge absolutamente pelo Teste de Comparação.

18. $\displaystyle \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3} < \frac{\pi/2}{n^3}$ e $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi/2}{n^3}$ converge $(p = 3 > 1)$,

logo $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\operatorname{arctg}\, n}{n^3}$ converge absolutamente pelo Teste de Comparação.

19. $\displaystyle \left|\cos\frac{n\pi}{6}\right| \le 1$, então uma vez que $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge $(p = \frac{3}{2} > 1)$, a série dada converge absolutamente pelo Teste de Comparação.

20. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/10^{n+1}}{n!/10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}$

$= \infty$

logo a série diverge pelo Teste da Razão.

21. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left[8-(n+1)^3\right]/\left[(n+1)!\right]}{(8-n^3)/(n!)}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left|\frac{8-(n+1)^3}{8-n^3}\right| = 0 < 1$

logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

22. $\displaystyle \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ diverge, uma vez que $\displaystyle \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ e $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Mas $\displaystyle \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge pelo Teste da Série Alternada, uma vez que $\displaystyle \frac{1}{\ln n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Então a série converge condicionalmente.

23. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/5^{2n+5}}{n^n/5^{2n+3}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{25}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1) = \infty$

logo a série diverge pelo Teste da Razão.

24. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-3n}{3+4n}\right| = \frac{3}{4} < 1$, logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Raiz.

25. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}\,(n+1)^2/[(n+3)!]}{(-2)^n\,n^2/[(n+2)!]}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{2\,(n+1)^2}{n^2\,(n+3)} = 0 < 1$

logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

26. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)!\,/\left[(n+1)!10^{n+1}\right]}{(n+2)!\,/(n!10^n)}$

$\displaystyle = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{10} < 1$

logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

27. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n+1)]}{n!/[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$

logo, a série converge absolutamente pelo Teste da Razão.

28. $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)\,(3n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)\,(2n+3)}}{\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}}\right|$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1$

logo a série diverge pelo Teste da Razão.