11

# Sequências e Séries Infinitas

# 11.6 Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

Dada qualquer série $\Sigma\, a_n$, podemos considerar a série correspondente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cujos termos são os valores absolutos dos termos da série original.

**1** **Definição** Uma série $\Sigma\, a_n$ é dita **absolutamente convergente** se a série de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ for convergente.

Observe que, se $\Sigma\, a_n$ for uma série com termos positivos, então $|a_n| = a_n$ e, assim, a convergência absoluta é a mesma coisa que a convergência nesse caso.

# Exemplo 1

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

é uma série *p* convergente (*p* = 2).

# Exemplo 2

Sabemos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

é convergente, mas não é absolutamente convergente, porque a série de valores absolutos correspondente é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que é a série harmônica (série $p$ com $p = 1$) e é, portanto, divergente.

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

**2** **Definição** Uma série $\Sigma\, a_n$ é chamada **condicionalmente convergente** se ela for convergente, mas não for absolutamente convergente.

O Exemplo 2 mostra que a série harmônica alternada é condicionalmente convergente. Então, é possível uma série ser convergente, porém não absolutamente convergente. Contudo, o próximo teorema mostra que a convergência absoluta implica convergência.

**3** **Teorema** Se uma série $\Sigma\, a_n$ for absolutamente convergente, então ela é convergente.

# Exemplo 3

Determine se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

é convergente ou divergente.

SOLUÇÃO: Essa série tem termos positivos e negativos, mas não é alternada. (O primeiro termo é positivo, os próximos três são negativos e os três seguintes são positivos. Os sinais trocam irregularmente.)

# Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Podemos aplicar o teste da comparação com a série de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Uma vez que $|\cos n| \leq 1$ para todo $n$, temos

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ é convergente (série $p$ com $p = 2$) e, assim, $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ é convergente pelo Teste da Comparação. Então a série dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ é absolutamente convergente e, portanto, convergente pelo Teorema 3.

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

O teste a seguir é muito útil para determinar se uma série dada é absolutamente convergente.

**O Teste da Razão**

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, , o Teste da Razão é inconclusivo, ou seja, nenhuma conclusão pode ser tirada sobre a convergência ou divergência de $\Sigma\, a_n$.

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

**OBSERVAÇÃO** A parte (iii) do Teste da Razão diz que, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, o Teste da Razão não dá nenhuma informação. Por exemplo, para a série convergente $\Sigma\ 1/n^2$ temos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

enquanto para a série divergente $\Sigma\, 1/n$ obtemos

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{quando } n \to \infty$$

Portanto, se $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, a série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir. Nesse caso, o Teste da Razão falha e devemos usar outro teste.

# Exemplo 5

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

SOLUÇÃO: Como os termos $a_n = n^n/n!$ são positivos, não precisamos dos símbolos de valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Uma vez que $e > 1$, a série dada é divergente pelo Teste da Razão.

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

**OBSERVAÇÃO** Embora o Teste da Razão funcione no Exemplo 5, um método mais simples é usar o Teste para Divergência. Uma vez que

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

segue que $a_n$ não tende a 0 quando $n \to \infty$. Portanto a série dada é divergente pelo Teste para Divergência.

# Convergência Absoluta e os Testes da Razão e da Raiz

O teste a seguir é conveniente para ser aplicado quando *n*-ésimas potências ocorrem.

**O Teste da Raiz**

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, então, a parte (iii) do Teste da Raiz diz que o teste não dá informação. A série $\Sigma\, a_n$ pode convergir ou divergir. (Se $L = 1$ no Teste da Razão, não tente o Teste da Raiz, porque $L$ será novamente 1. E se $L = 1$ no Teste da Raiz, não tente o Teste da Razão, pois ele também falhará.)

# Exemplo 6

Teste a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUÇÃO:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Então, a série dada converge pelo Teste da Raiz.

# Rearranjos

# Rearranjos

A questão de uma série ser absolutamente convergente ou condicionalmente convergente tem importância na questão sobre se somas infinitas se comportam ou não como somas finitas.

Se rearranjarmos a ordem dos termos em uma soma finita, então é claro que o valor da soma permanecerá inalterado. Mas esse não é sempre o caso para uma série infinita. Por um **rearranjo** de uma série infinita $\Sigma\, a_n$ queremos dizer uma série obtida simplesmente mudando a ordem dos termos. Por exemplo, um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ poderia começar como a seguir:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

# Rearranjos

Ocorre que

> se $\Sigma\, a_n$ é uma série absolutamente convergente com soma $s$, então qualquer rearranjo de $\Sigma\, a_n$ tem a mesma soma $s$.

Contudo, qualquer série condicionalmente convergente pode ser rearranjada para dar uma soma diferente. Para ilustrarmos esse fato, vamos considerar a série harmônica alternada

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

# Rearranjos

Se multiplicarmos essa série por $\frac{1}{2}$, obteremos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2$$

Inserindo zeros entre os termos dessa série, teremos

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \ln 2 \tag{7}$$

Agora adicionamos as séries nas Equações 6 e 7:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{3}{2} \ln 2 \tag{8}$$

# Rearranjos

Observe que a série em $\boxed{8}$ contém os mesmos termos que em $\boxed{6}$, mas rearranjados de modo que um termo negativo ocorra depois de cada par de termos positivos. As somas dessas séries, contudo, são diferentes. De fato, Riemann demonstrou que

> se $\Sigma\, a_n$ for uma série condicionalmente convergente e $r$ for qualquer número real, então existe um rearranjo de $\Sigma\, a_n$ que tem uma soma igual a $r$.