Exercício sobre estimativa da soma de uma série alternada convergente

Pelo teste da estimativa da soma de uma série alternada convergente, no mínimo, quantos termos do somatório devem ser usados para aproximar a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} \tag{1}$$

com precisão de quatro casas decimais?

Solução:

Escrevendo a série dada como

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$$

encontramos

$$b_n=\frac{1}{(2n-1)!}.$$

A (1) é convergente pelo “Teste da Série Alternada” pois b_n é decrescente e tende a zero quando n tende a infinito.

Queremos escrever $S \approx S_n$. Para ter certeza de uma precisão de quatro casas decimais devemos ter

$$R_n \leq 10^{-5}.$$

O resto ou erro acontecendo uma casa decimal além da precisão requerida.

Pelo "Teorema de Estimativa de Resto em Séries Alternadas", visto no V126, temos

$$\mid R_n \mid \leq b_{n+1}.$$

Logo, procuramos o menor valor de n que satisfaz:

$$\mid R_n \mid \leq b_{n+1} \leq 10^{-5},$$

$$\frac{1}{(2n+1)!} \leq 10^{-5}.$$

A tabela mostra que isso acontece quando $n=4$ e $S \approx S_4 \approx 0,8415$.