11.4 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. $\dfrac{1}{n^3+n^2} < \dfrac{1}{n^3}$ uma vez que $n^3+n^2 > n^3$ para todo n, e uma vez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série p convergente ($p = 3 > 1$), $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}$ converge também pelo Teste de Comparação.

2. $\dfrac{3}{4^n+5} < \dfrac{3}{4^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n}$ converge (geométrico com $|r| = \dfrac{1}{4} < 1$) então, pelo Teste de Comparação, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n+5}$ também converge.

3. $\dfrac{3}{n2^n} \leq \dfrac{3}{2^n}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ é uma série geométrica com $|r| = \dfrac{1}{2} < 1$, e então converge, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n2^n}$ também converge pelo Teste de Comparação.

4. $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (séries p com $p = \dfrac{1}{2} < 1$), então $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}-1}$ diverge pelo Teste de Comparação.

5. $\dfrac{1+5^n}{4^n} > \dfrac{5^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n$ é uma série geométrica divergente ($|r| = \dfrac{5}{4} > 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{4^n}$ diverge pelo teste de Comparação.

6. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($p = \dfrac{3}{2} > 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n\sqrt{n}}$ converge pelo Teste de Comparação.

7. $\dfrac{3}{n(n+3)} < \dfrac{3}{n^2}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série p convergente ($p = 2 > 1$), então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$ converge pelo Teste de Comparação.

8. $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} < \dfrac{1}{\sqrt{n\cdot n\cdot n}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ e uma vez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge ($p = \dfrac{3}{2} > 1$), assim como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ pelo Teste de Comparação.

9. Utilize o Teste de Comparação no Limite com $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ e $b_n = \dfrac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1(1+1/n)(1+2/n)}} = 1 > 0$$

logo, uma vez que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, também diverge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$.

10. $\dfrac{n}{(n+1)2^n} < \dfrac{1}{2^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente ($|r| = \frac{1}{2} < 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ também converge pelo Teste de Comparação.

11. $\dfrac{3+\cos n}{3^n} \leq \dfrac{4}{3^n}$ uma vez que $\cos n \leq 1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n}$ é uma série geométrica com $|r| = \frac{1}{3} < 1$ e então converge, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\cos n}{3^n}$ também converge pelo Teste de Comparação.

12. $\dfrac{5n}{2n^2-5} > \dfrac{5n}{2n^2} = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ e uma vez que $\displaystyle\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série harmônica), $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2n^2-5}$ também diverge pelo Teste de Comparação.

13. $\dfrac{n}{\sqrt{n^5+4}} < \dfrac{n}{\sqrt{n^5}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é uma série p convergente ($p = \frac{3}{2} > 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+4}}$ converge pelo Teste de Comparação.

14. $\dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^4} < \dfrac{\pi/2}{n^4}$ e $\displaystyle\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ converge ($p = 4 > 1$), logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^4}$ converge pelo Teste de Comparação.

15. Utilize o Teste de Comparação no Limite com $a_n = \dfrac{1}{n^2-4}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2}$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-4} = 1 > 0$. Uma vez que $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} b_n$ converge ($p = 2 > 1$), $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$ também converge.

16. Sejam $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Então,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+n^2}{n^4+1} = 1 > 0$. Uma vez que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ é uma série p convergente ($p = 2 > 1$), também

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^4+1}$ é convergente pelo Teste de Comparação no Limite.

17. Sejam $a_n = \dfrac{n+1}{n2^n}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^n}$. Então,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1 > 0$. Uma vez que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ é uma série geométrica convergente

$(|r| = \frac{1}{2} < 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n2^n}$ converge pelo Teste de Comparação.

18. Utilize o Teste de Comparação no Limite com

$a_n = \dfrac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^{4/3}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10/3}-3n^{7/3}}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-3/n}{\sqrt[3]{1-4n^{-8}}}$$
$$= 1 > 0$$

logo, uma vez que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge ($p = \frac{4}{3} > 1$),

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2-3n}{\sqrt[3]{n^{10}-4n^2}}$ também converge.