11

Sequências e Séries Infinitas

11.4 Os Testes de Comparação

Os Testes de Comparação

Nos testes de comparação, a ideia é comparar uma série dada com uma que sabemos ser convergente ou divergente. Por exemplo, a série

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

nos remete à série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, que é uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $r = \frac{1}{2}$ e é, portanto, convergente.

Como a série $\boxed{1}$ é muito similar a uma série convergente, temos a impressão de que esta também deve ser convergente. Na verdade, é. A desigualdade

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

Os Testes de Comparação

mostra que nossa série dada $\boxed{1}$ tem termos menores que aqueles da série geométrica e, dessa forma, todas as suas somas parciais são também menores que 1 (a soma da série geométrica). Isso significa que suas somas parciais formam uma sequência crescente limitada, que é convergente. Também segue que a soma da série é menor que a soma da série geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Os Testes de Comparação

Argumentação semelhante pode ser usada para demonstrar o seguinte teste, que se aplica apenas a séries cujos termos são positivos. A primeira parte diz que, se tivermos uma série cujos termos são *menores* que aqueles de uma série que sabemos ser *convergente*, então nossa série também será convergente. A segunda parte diz que, se começarmos com uma série cujos termos são *maiores* que aqueles de uma série que sabemos ser *divergente*, ela também será divergente.

O Teste de Comparação Suponha que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

Os Testes de Comparação

Ao usarmos o Teste de Comparação, devemos, é claro, ter algumas séries conhecidas $\Sigma\, b_n$ para o propósito de comparação. Na maior parte do tempo usamos uma destas séries:

- A série p [$\Sigma\, 1/n^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$];
- Uma série geométrica [$\Sigma\, ar^{n-1}$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$].

Exemplo 1

Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ converge ou diverge.

SOLUÇÃO: Para um *n* grande, o termo dominante no denominador é $2n^2$, assim, comparamos a série dada com a série Σ $5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

pois o lado esquerdo tem um denominador maior. (Na notação do Teste de Comparação, a_n é o lado esquerdo e b_n é o lado direito.)

Exemplo 1 – *Solução*

continuação

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente porque é uma constante vezes uma série *p* com *p* = 2 > 1. Portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

é convergente pela parte (i) do Teste de Comparação.

Os Testes de Comparação

OBSERVAÇÃO 1 Embora a condição $a_n \leq b_n$ ou $a_n \geq b_n$ no Teste de Comparação seja dada para todo n, precisamos verificar apenas que ela vale para $n \geq N$, onde N é algum inteiro fixo, porque a convergência de uma série não é afetada por um número finito de termos.

OBSERVAÇÃO 2 Os termos da série sendo testada devem ser menores que aqueles de uma série convergente ou maiores que aqueles de uma série divergente. Se os termos forem maiores que os de uma série convergente ou menores que os de uma série divergente, então o Teste de Comparação não se aplica.

Os Testes de Comparação

Considere, por exemplo, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

A desigualdade

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

é inútil para ser usada com o Teste de Comparação, porque $\sum b_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente e $a_n > b_n$.

Os Testes de Comparação

Mesmo assim, temos a impressão de que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ deve ser convergente, pois ela é muito parecida com a série geométrica convergente $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Em tais casos, o seguinte teste pode ser usado.

O Teste de Comparação no Limite Suponha que Σa_n e Σb_n sejam séries com termos positivos. Se

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

onde c é um número finito e $c > 0$, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

Exemplo 3

Teste a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ quanto a convergência ou divergência.

SOLUÇÃO: Usamos o Teste de Comparação no Limite com

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

e obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Exemplo 3 – *Solução*

continuação

Como esse limite existe e $\Sigma\ 1/2^n$ é uma série geométrica convergente, a série dada converge pelo Teste de Comparação no Limite.

Estimando Somas

Estimando Somas

Se tivéssemos usado o Teste de Comparação para mostrar que uma série $\Sigma\, a_n$ converge pela comparação com uma série $\Sigma\, b_n$, poderíamos ser capazes de estimar a soma $\Sigma\, a_n$ pela comparação dos restos. Consideramos o resto

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

Para a série de comparação $\Sigma\, b_n$, consideramos o resto correspondente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Estimando Somas

Como $a_n \leq b_n$ para todo n, temos $R_n \leq T_n$. Se $\Sigma\, b_n$ é uma série p, podemos estimar seu restante T_n. Se $\Sigma\, b_n$ for uma série geométrica, então T_n é a soma de uma série geométrica e podemos somá-la exatamente. Em qualquer dos dois casos, sabemos que R_n é menor que T_n.

Exemplo 5

Use a soma dos 100 primeiros termos para aproximar da soma da série $\Sigma\ 1/(n^3 + 1)$. Estime o erro envolvido nessa aproximação.

SOLUÇÃO: Uma vez que

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

a série dada é convergente pelo Teste de Comparação. O resto T_n para a série de comparação $\Sigma\ 1/n^3$ foi estimado usando a Estimativa do Resto para o Teste da Integral.

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Lá encontramos que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Portanto, o resto R_n para a série dada satisfaz

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Com n = 100, temos

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0{,}00005$$

Exemplo 5 – *Solução*

continuação

Usando uma calculadora programável ou um computador, encontramos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0{,}6864538$$

com erro menor que 0,00005.