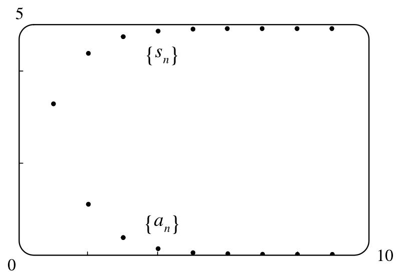
11.2 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1.

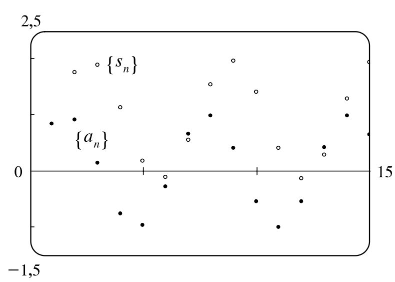
n	s_n
1	3,33333
2	4,44444
3	4,81481
4	4,93827
5	4,97942
6	4,99314
7	4,99771
8	4,99924
9	4,99975
10	4,99992
11	4,99997
12	4,99999



A partir do gráfico, parece que a série converge. Na realidade, é uma série geométrica com $a = \frac{10}{3}$ e $r = \frac{1}{3}$, então a soma é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n} = \frac{10/3}{1 - 1/3} = 5$. Observe que o ponto correspondente a $n = 1$ é parte de ambos, $\{a_n\}$ e $\{s_n\}$.

2.

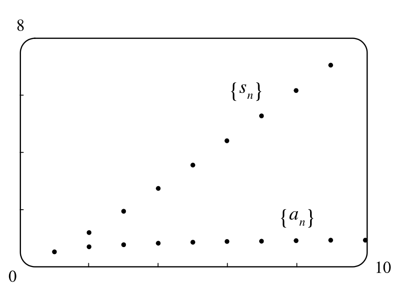
n	s_n
1	0,8415
2	1,7508
3	1,8919
4	1,1351
5	0,1762
6	−0,1033
7	0,5537
8	1,5431
9	1,9552
10	1,4112
11	0,4112
12	−0,1254



A série diverge, uma vez que seus termos não se aproximam de 0.

3.

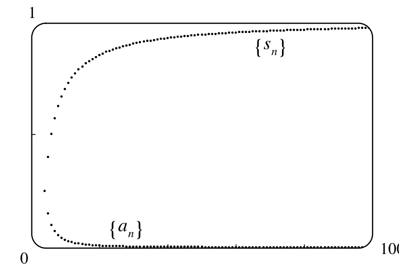
n	s_n
1	0,50000
2	1,16667
3	1,91667
4	2,71667
5	3,55000
6	4,40714
7	5,28214
8	6,17103
9	7,07103
10	7,98012



A série diverge, uma vez que seus termos não se aproximam de 0.

4.

n	s_n
4	0,25000
5	0,40000
6	0,50000
7	0,57143
8	0,62500
9	0,66667
10	0,70000
11	0,72727
12	0,75000
13	0,76923
⋯	⋯
99	0,96970
100	0,97000



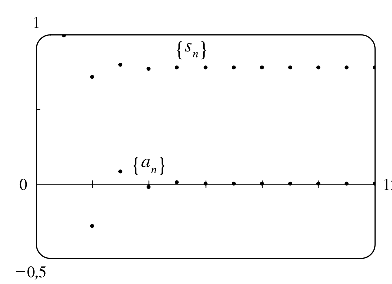
A partir do gráfico, as séries convergem para aproximadamente 1. Para encontrar a soma, procedemos conforme no Exemplo 6: uma vez que $\frac{3}{i(i-1)} = \frac{3}{i-1} - \frac{3}{i}$, as somas parciais são

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=4}^{n} \left(\frac{3}{i-1} - \frac{3}{i} \right) \\ &= \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right) + \cdots \\ &\qquad + \left(\frac{3}{n-2} - \frac{3}{n-1} \right) + \left(\frac{3}{n-1} - \frac{3}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{3}{n} \end{aligned}$$

e então a soma é $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

5.

n	s_n
1	1,000000
2	0,714286
3	0,795918
4	0,772595
5	0,779259
6	0,777355
7	0,777899
8	0,777743
9	0,777788
10	0,777775
11	0,777779
12	0,777778



A partir do gráfico, parece que a série converge para aproximadamente 0,8. Na realidade, ela é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -\frac{2}{7}$, então a soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7} \right)^{n-1} = \frac{1}{1 - (-2/7)} = \frac{7}{9}.$$

6. $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = 4$ e $r = \frac{2}{5}$. Uma vez que $|r| = \frac{2}{5} < 1$, a série converge para $\frac{4}{1 - 2/5} = \frac{4}{3/5} = \frac{20}{3}$.

7. $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \cdots$ é uma série geométrica com $a = 1$ e $r = -\frac{3}{2}$. Uma vez que $|r| = \frac{3}{2} > 1$, a série diverge.

8. $a = 1$, $|r| = \left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, então a série converge com a soma $\dfrac{1}{1-(-1/2)} = \dfrac{2}{3}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ é geométrica com $a = \frac{2}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$, então converge para $\dfrac{2/3}{1-(-1/3)} = \dfrac{1}{2}$.

10. $a = -\frac{81}{100}$, $|r| = \left|-\frac{10}{9}\right| > 1$, então a série diverge.

11. $a = \dfrac{1}{2^6}$, $|r| = \frac{1}{4} < 1$, então a série converge com a soma

$$\frac{1/2^6}{1-1/4} = \frac{1}{48}.$$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$ diverge uma vez que $r = \frac{6}{5} > 1$.

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \Rightarrow a = \frac{1}{e^2} = |r| < 1$ então a série converge para $\dfrac{1/e^2}{1-1/e^2} = \dfrac{1}{e^2-1}$.

14. Para $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}8^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 8\left(\frac{8}{3}\right)^n$, $a = \frac{64}{3}$ e $r = \frac{8}{3} > 1$, então a série diverge.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow a = 4$, $|r| = \frac{4}{5} < 1$, então a série converge para $\dfrac{4}{1-4/5} = 20$.

16. $a = 1$, $|r| = \left|-\frac{3}{\pi}\right| < 1$, então a série converge para $\dfrac{1}{1-(-3/\pi)} = \dfrac{\pi}{\pi+3}$.

17. $a = \dfrac{5e}{3}$, $r = \dfrac{e}{3} < 1$, então a série converge para $\dfrac{5e/3}{1-e/3} = \dfrac{5e}{3-e}$.

18. $a = 1$, $r = \frac{5}{8} < 1$, então a série converge para $\dfrac{1}{1-5/8} = \dfrac{8}{3}$.

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n}}{2^{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{9}{8}\right)^n$, $|r| = \dfrac{9}{8} > 1$, então a série diverge.

20. Esta série diverge, uma vez que se fosse convergente, então teríamos $2 \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (pelo Teorema 8) também seria; mas sabemos que $\dfrac{1}{n}$ é divergente (Exemplo 7).

21. Converge.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1/2}{i} - \frac{1/2}{i+2}\right) \text{ (frações parciais)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right)$$

A última soma é uma série telescópica:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}[2(0{,}1)^n + (0{,}2)^n] = 2\sum_{n=1}^{\infty}(0.1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(0{,}2)^n$.

Estas são séries geométricas convergentes e então pelo Teorema 8, a soma também é convergente.

$$2\left(\frac{0{,}1}{1-0{,}1}\right) + \frac{0{,}2}{1-0{,}2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{4} = \frac{17}{36}$$

23. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1 \neq 0$, então a série diverge pelo Teste para Divergência.

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{2}{3^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1-1/2} + 2\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = 5$$

25. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{5+2^{-n}} = \frac{1}{5} \neq 0$, então a série diverge pelo Teste para Divergência.

26.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3(1+1/n)(1+2/n)} = \frac{1}{3} \neq 0$$

então a série diverge pelo Teste para Divergência.

27. Converge.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1/3}{3i-2} - \frac{1/3}{3i+1}\right] \text{ (frações parciais)}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\right] + \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)} \text{ (série telescópica)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}$$

28. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 2^n\right)$ não existe, de modo que a série diverge pelo Teste para Divergência.

29. $$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1/2}{2i-1} - \frac{1/2}{2i+1}\right] \quad \text{(frações parciais)}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$$
logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{2}$.

30. Converge.
$$s_n = \left(\text{sen } 1 - \text{sen } \tfrac{1}{2}\right) + \left(\text{sen } \tfrac{1}{2} - \text{sen } \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\text{sen } \frac{1}{n} - \text{sen } \frac{1}{n+1}\right)$$
$= \text{sen } 1 - \text{sen } \dfrac{1}{n+1}$, logo
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\text{sen } \frac{1}{n} - \text{sen } \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{sen } 1 - \text{sen } 0 = \text{sen } 1$$

31. $s_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \cdots + [\ln n - \ln(n+1)]$
$= \ln 1 - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$ (série telescópica).
Portanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, logo a série é divergente.

32. $$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1/2}{i} - \frac{1}{i+1} + \frac{1/2}{i+2}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1/2}{i} - \frac{1/2}{i+1}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1/2}{i+1} + \frac{1/2}{i+2}\right)$$
ambos são claramente somas telescópicas, logo
$$s_n = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}\right] + \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)}\right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$
Então, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$.

33. Escreva $\ln \dfrac{n^2-1}{n^2} = \ln \dfrac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$. Então
$$s_n = \ln\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} + \ln\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} + \ln\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} + \cdots + \ln\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)} + \ln\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$
$$= \ln\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot \cdots \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right)$$
$$= \ln\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$
Portanto,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} s_n = \ln\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1}{2}.$$

34. $0{,}\overline{5} = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \cdots = \dfrac{0{,}5}{1-0{,}1} = \dfrac{5}{9}$

35. $0{,}\overline{15} = 0{,}15 + 0{,}0015 + 0{,}000015 + \cdots = \dfrac{0{,}15}{1-0{,}01} = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$

36. $0{,}\overline{307} = 0{,}307 + 0{,}000307 + 0{,}000000307 + \cdots = \dfrac{0{,}307}{1-0{,}001} = \dfrac{307}{999}$

37. $1{,}1\overline{23} = 1{,}1 + 0{,}023 + 0{,}00023 + 0{,}0000023 + \cdots = 1{,}1 + \dfrac{0{,}023}{1-0{,}01} = \dfrac{11}{10} + \dfrac{23}{990} = \dfrac{556}{495}$

38. $4{,}\overline{1570} = 4 + 0{,}1570 + 0{,}00001570 + \cdots = 4 + \dfrac{0{,}1570}{1-0{,}0001} = \dfrac{41\,566}{9999}$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ é geométrica com $r = 3x$, então converge para $|3x| < 1 \iff -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ para $\dfrac{1}{1-3x}$.

40. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{x}{5}\right)^n$ é geométrica com $r = \dfrac{x}{5}$, então converge sempre que $\left|\dfrac{x}{5}\right| < 1 \iff -5 < x < 5$. A soma é
$$\frac{(x/5)^2}{1-x/5} = \frac{x^2}{25-5x}.$$

41. $\sum_{n=0}^{\infty} (2\,\text{sen } x)^n$ é geométrica, então converge sempre que $|2\,\text{sen } x| < 1 \iff -\frac{1}{2} < \text{sen } x < \frac{1}{2} \iff n\pi - \frac{\pi}{6} < x < n\pi + \frac{\pi}{6}$, onde a soma é $\dfrac{1}{1-2\,\text{sen } x}$.

42. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ é geométrica com $r = \dfrac{1}{x}$, então converge sempre que $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1 \iff |x| > 1 \iff x > 1$ ou $x < -1$, e a soma é $\dfrac{1}{1-1/x} = \dfrac{x}{x-1}$.

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \text{tg}^n\, x$ é geométrica e converge quando $|\text{tg } x| < 1 \iff -1 < \text{tg } x < 1 \iff n\pi - \frac{\pi}{4} < x < n\pi + \frac{\pi}{4}$ (n qualquer inteiro). Nesses intervalos a soma é $\dfrac{1}{1-\text{tg } x}$.