Sequência de quadrados inscritos em um triângulo

Juan López Linares

10 de setembro de 2020

Problema 1. *Seja ABC um triângulo acutângulo de base $AB = b$ e altura $ZL = h$. O quadrado $KJHI$ está "inscrito" no sentido que os pontos J e H estão nos lados AC e BC, respetivamente, e o lado IK sobre o lado AB. Analogamente o quadrado $RSQP$ está inscrito no triângulo JHC e o quadrado $DEFG$ no triângulo RPC. Seja*

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

a sequência de comprimentos dos lados dos quadrados $KJHI$, $RSQP$, $DEFG$, $\cdots$. A Figura 1 mostra uma construção possível.

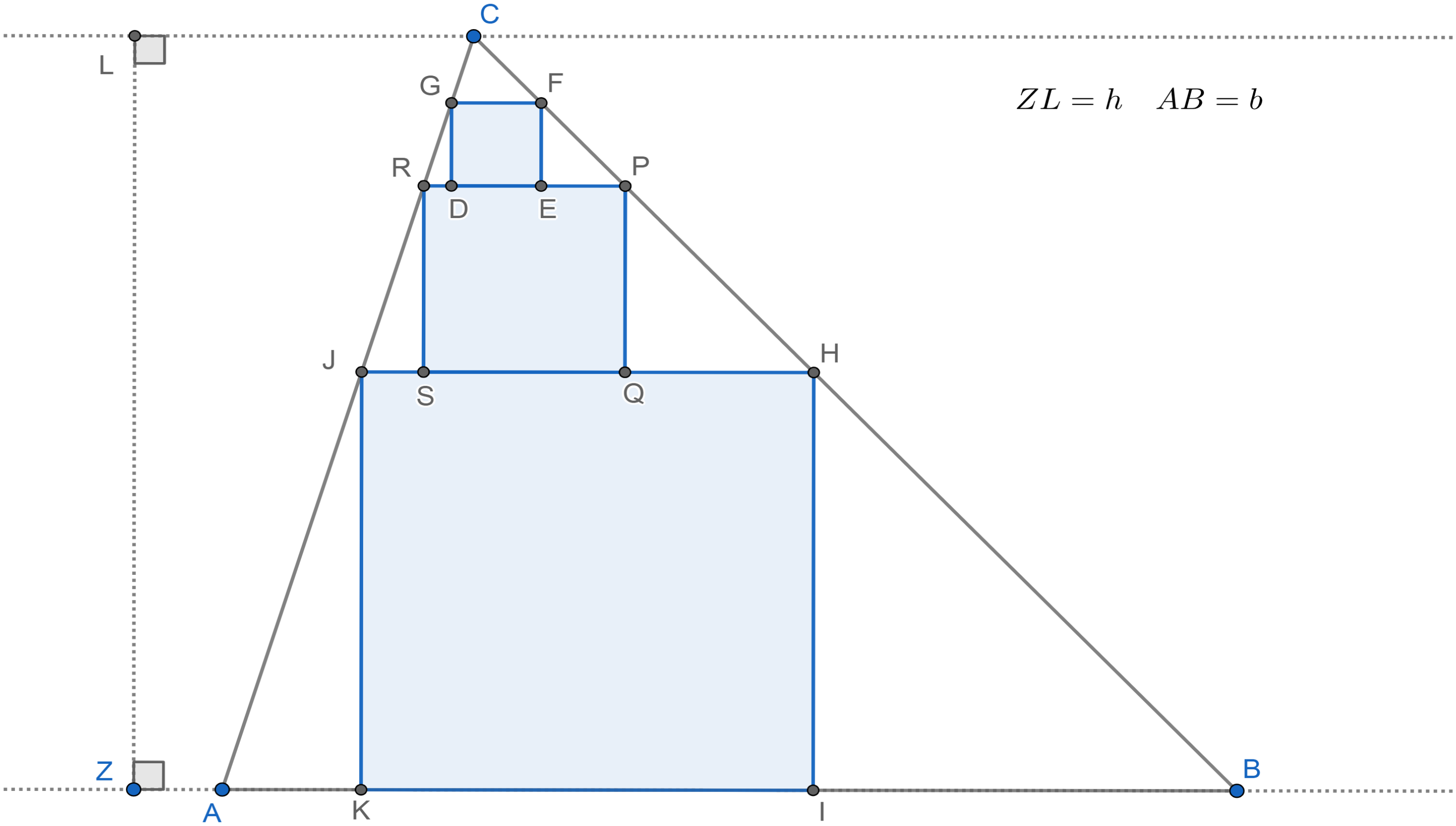

Figura 1: Passos de uma construção possível para auxiliar na solução do problema. Versão interativa em [1].

a) Determinar a_1 como função de b e h.

b) Determinar a_2 e a_3 como função de b e h. Conjeturar uma fórmula para a_n.

c) Calcular a soma das áreas de todos os quadrados. Isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

Uma solução:

a) Podemos calcular a área do triângulo ABC de duas formas:

$$A\,(ABC) = \frac{1}{2}bh, \tag{1}$$

$$A\,(ABC) = A\,(AKJ) + A\,(KJHI) + A\,(BIH) + A\,(JHC)\,.$$

Seja $AK = x$. Temos $KI = a_1$, $IB = b - a_1 - x$ e $h_1 = h - a_1$ (altura do triângulo JHC). Logo,

$$A\,(ABC) = \frac{1}{2}xa_1 + a_1^2 + \frac{1}{2}(b - a_1 - x)a_1 + \frac{1}{2}a_1(h - a_1). \tag{2}$$

Igualando (1) e (2) segue:

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}xa_1 + a_1^2 + \frac{1}{2}(b - a_1 - x)a_1 + \frac{1}{2}a_1(h - a_1),$$

$$bh = xa_1 + 2a_1^2 + (b - a_1 - x)a_1 + a_1(h - a_1),$$

$$bh = xa_1 + 2a_1^2 + ba_1 - a_1^2 - xa_1 + a_1h - a_1^2,$$

$$bh = ba_1 + a_1h = a_1(b + h),$$

$$a_1 = b\frac{h}{b + h}. \tag{3}$$

b) Notamos que:

$$h_1 = h - a_1 = h\left(1 - \frac{b}{b + h}\right) = h\frac{h}{b + h}.$$

Para determinar a_2 devemos trocar em (3) b por a_1 e h por h_1:

$$a_2 = a_1\frac{h_1}{a_1 + h_1} = b\frac{h}{b + h}\frac{h\frac{h}{b+h}}{b\frac{h}{b+h} + h\frac{h}{b+h}} = b\frac{h\frac{h}{b+h}}{b + h} = b\left(\frac{h}{b + h}\right)^2. \tag{4}$$

Notamos que

$$h_2 = h_1 - a_2 = h\frac{h}{b + h} - b\left(\frac{h}{b + h}\right)^2 = \frac{h^2}{b + h}\left(1 - b\frac{1}{b + h}\right) = h\left(\frac{h}{b + h}\right)^2.$$

Para determinar a_3 devemos trocar em (3) b por a_2 e h por h_2:

$$a_3 = a_2\frac{h_2}{a_2 + h_2} = b\left(\frac{h}{b + h}\right)^2 \frac{h\left(\frac{h}{b+h}\right)^2}{b\left(\frac{h}{b+h}\right)^2 + h\left(\frac{h}{b+h}\right)^2} = b\frac{h\left(\frac{h}{b+h}\right)^2}{b + h} = b\left(\frac{h}{b + h}\right)^3. \tag{5}$$

Neste ponto podemos conjeturar que:

$$h_n = h\left(\frac{h}{b + h}\right)^n,$$

$$a_n = b\left(\frac{h}{b+h}\right)^n. \tag{6}$$

c) De (6) segue

$$a_{n+1} = b\left(\frac{h}{b+h}\right)^{n+1}. \tag{7}$$

Logo, a razão q entre termos consecutivos da sequência (a_n) não depende de n:

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{h}{b+h} = q < 1.$$

Isto é, a sequência (a_n) é uma progressão geométrica e a série associada é convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{b\frac{h}{b+h}}{1-\frac{h}{b+h}} = h.$$

O resultado anterior é o esperado pois a soma de todas as alturas dos quadrados deve ser igual a altura do triângulo ABC.

A razão q^2 entre termos consecutivos da sequência (a_n^2) também não depende de n:

$$0 < \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{h}{b+h}\right)^2 = q^2 < 1.$$

A série com a soma dos quadrados é

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{\left(b\frac{h}{b+h}\right)^2}{1-\left(\frac{h}{b+h}\right)^2} = \frac{b^2h^2}{(b+h)^2-h^2} = \frac{bh^2}{b+2h},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{bh^2}{b+2h} = \frac{1}{2}bh\left(\frac{h}{\frac{b}{2}+h}\right) < \frac{1}{2}bh.$$

Como esperado a soma das áreas de todos os quadrados deve ser menor que a área do triângulo ABC.

Referências

[1] LÓPEZ LINARES, J. **Sequências de quadrados inscritos no triângulo.** Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hrwwwqrj. Acesso em: 10 set. 2020.

1