Primeira avaliação presencial
Cálculo II
EAN

Prof. Juan López Linares

1 de outubro de 2022

1 A03-Problema de valor inicial

Exercício 1. *Resolver o problema de valor inicial:*

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

1.1 Resolução do Exercício 1

i) Resolve-se a equação diferencial homogênea:

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

Propondo uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx}$$

encontra-se a equação caraterística:

$$r^2 + 4 = 0,$$

$$r^2 = -4.$$

Logo,

$$r_{1,2} = \pm 2i = \alpha \pm \beta i.$$

Como o discriminante é negativo a equação se classifica tipo III com $\alpha = 0$ e $\beta = 2$.

A solução geral é da forma

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Isto é,

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x).$$

Como as restrições do P.V.I. acontecem em $x_0 = \frac{\pi}{4} \neq 0$ na equação anterior será feita a substituição de x por $x - x_0$ e colocados novos coeficientes $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$:

$$y_{gh}(x) = D_1 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + D_2 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{1}$$

ii) Utilizando a regra da cadeia para derivar (1) encontra-se:

$$y'_{gh}(x) = -2D_1 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2D_2 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right). \tag{2}$$

iii) Da primeira restrição $y(\frac{\pi}{4}) = 0$ avaliada em (1) tem-se:

$$0 = y(\frac{\pi}{4}) = D_1 \cos(0) + D_2 \operatorname{sen}(0),$$

$$0 = D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0,$$

$$D_1 = 0. \tag{3}$$

iv) Da segunda restrição $y'(\frac{\pi}{4}) = 2$ avaliada em (2) tem-se:

$$2 = y'(\frac{\pi}{4}) = -2D_1 \operatorname{sen}(0) + 2D_2 \cos(0),$$

$$2 = -2D_1 \cdot 0 + 2D_2 \cdot 1,$$

$$D_2 = 1. \tag{4}$$

Logo, das equações (1), (3) e (4) chega-se em:

$$y_{PVI}(x) = \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Pela identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

a equação (5) também pode ser escrita como:

$$y_{PVI}(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(2x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y_{PVI}(x) = -\cos(2x).$$

Um vídeo com uma demonstração geométrica do cosseno e seno da soma encontra-se aqui. Outro vídeo com um problema análogo está disponível aqui.

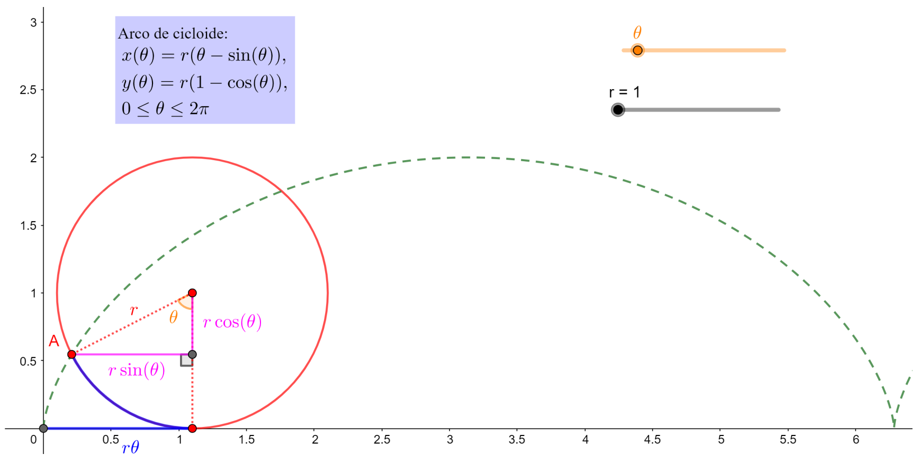
2 A06-Cálculos com curvas paramétricas

Exercício 2. *Calcular a área limitada pelo arco de cicloide*

$$x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}(\theta)),\ y(\theta) = r(1 - \cos(\theta)),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

e o eixo x. O valor de r é um parâmetro (Figure 1).

Figura 1: Cicloide é a curva descrita pelo ponto A (linha verde tracejada) quando a circunferência mostrada gira e desloca-se sem deslizamento. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

2.1 Resolução do Exercício 2

Para o cálculo de áreas com curvas paramétricas utiliza-se a integral a seguir:

$$A = \int_{t_i}^{t_f} y(t)x'(t)dt.$$

Neste caso o parâmetro é θ. Ou seja, a integral é modificada como:

$$A = \int_{\theta_i}^{\theta_i} y(\theta)x'(\theta)d\theta.$$

A seguir calcula-se a derivada relativo a θ de $x(\theta) = r(\theta - \operatorname{sen}(\theta))$:

$$x'(\theta) = r(1 - \cos(\theta)).$$

Portanto, pode ser escrito que:

$$A = \int_{0}^{2\pi} r(1 - \cos(\theta))r(1 - \cos(\theta))d\theta,$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos(\theta))^2 d\theta.$$

Desenvolve-se o quadrado e separa-se em três integrais:

$$A = r^2 \left[\int_0^{2\pi} d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right],$$

$$A = r^2 \left[\theta|_0^{2\pi} - \cancelto{0}{2\,\mathrm{sen}(\theta)|_0^{2\pi}} + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right],$$

$$A = r^2 \left[2\pi + \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \right]. \tag{6}$$

Para o calculo da integral que está faltando nota-se que:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta),$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \left[1 - \cos^2(\theta)\right],$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1,$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos(2\theta)\right].$$

Calcula-se agora a integral:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right],$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[2\pi + \cancelto{0}{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)|_0^{2\pi}} \right],$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \pi. \tag{7}$$

Substituindo (7) e (6) encontra-se:

$$A = 3\pi r^2.$$