Primeira avaliação presencial
Cálculo II
EAD

Prof. Juan López Linares

29 de setembro de 2022

1 A03-Problema de valor inicial

Exercício 1. *Resolver o problema de valor inicial:*

$$y''(x) + 4y(x) = 0,\ y(\frac{\pi}{6}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{6}) = 0.$$

1.1 Resolução do Exercício 1

i) Resolve-se a equação diferencial homogênea:

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

Propondo uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx}$$

encontra-se a equação caraterística:

$$r^2 + 4 = 0,$$

$$r^2 = -4.$$

Logo,

$$r_{1,2} = \pm 2i = \alpha \pm \beta i.$$

Como o discriminante é negativo a equação se classifica tipo III com $\alpha = 0$ e $\beta = 2$.

A solução geral é da forma

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x),$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Isto é,

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x).$$

Como as restrições do P.V.I. acontecem em $x_0 = \frac{\pi}{6} \neq 0$ na equação anterior será feita a substituição de x por $x - x_0$ e colocados novos coeficientes $D_1, D_2 \in \mathbb{R}:$

$$y_{gh}(x) = D_1 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + D_2 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right). \tag{1}$$

ii) Utilizando a regra da cadeia para derivar (1) encontra-se:

$$y'_{gh}(x) = -2D_1 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 2D_2 \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right). \tag{2}$$

iii) Da primeira restrição $y(\frac{\pi}{6}) = 1$ avaliada em (1) tem-se:

$$\begin{aligned} 1 = y(\frac{\pi}{6}) &= D_1 \cos(0) + D_2 \operatorname{sen}(0), \\ 1 &= D_1 \cdot 1 + D_2 \cdot 0, \\ D_1 &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

iv) Da segunda restrição $y'(\frac{\pi}{6}) = 0$ avaliada em (2) tem-se:

$$\begin{aligned} 0 = y'(\frac{\pi}{6}) &= -2D_1 \operatorname{sen}(0) + 2D_2 \cos(0), \\ 0 &= -2D_1 \cdot 0 + 2D_2 \cdot 1, \\ D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Logo, das equações (1), (3) e (4) chega-se em:

$$y_{PVI}(x) = \cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \tag{5}$$

Pela identidade trigonométrica

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$$

a equação (5) também pode ser escrita como:

$$y_{PVI}(x) = \cos(2x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

$$y_{PVI}(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(2x).$$

Um vídeo com uma demonstração geométrica do cosseno e seno da soma encontra-se aqui. Outro vídeo com um problema análogo está disponível aqui.

2 A08-Cálculos com curvas em coordenadas polares

Exercício 2. *Escrever em coordenadas cartesianas a equação da reta tangente a curva polar $r(\theta) = 2\theta$ quando $\theta = \frac{\pi}{3}$.*

2.1 Resolução do Exercício 2

Como $r(\theta) = 2\theta$, pelas equações de transformação de polares para cartesiana obtêm-se:

$$x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) = 2\theta\cos(\theta),$$

$$y(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) = 2\theta\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Derivando as equações anteriores encontra-se:

$$x'(\theta) = 2\cos(\theta) - 2\theta\,\mathrm{sen}(\theta),$$

$$y'(\theta) = 2\,\mathrm{sen}(\theta) + 2\theta\cos(\theta).$$

A primeira derivada de forma paramétrica é calculada como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = \frac{y'(\theta)}{x'(\theta)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,\mathrm{sen}(\theta) + 2\theta\cos(\theta)}{2\cos(\theta) - 2\theta\,\mathrm{sen}(\theta)} = \frac{\mathrm{sen}(\theta) + \theta\cos(\theta)}{\cos(\theta) - \theta\,\mathrm{sen}(\theta)}.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{3}$ vale:

$$x_0 = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$y_0 = r\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi,$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)},$$

$$m = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}+\pi}{3-\sqrt{3}\pi}.$$

A equação da reta tangente em coordenadas cartesianas pode ser escrita como:

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

$$y - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi = \frac{3\sqrt{3}+\pi}{3-\sqrt{3}\pi}\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Um vídeo com um problema análogo está disponível aqui. Gráfico no GeoGebra.