Cálculo de área limitada por curva polar

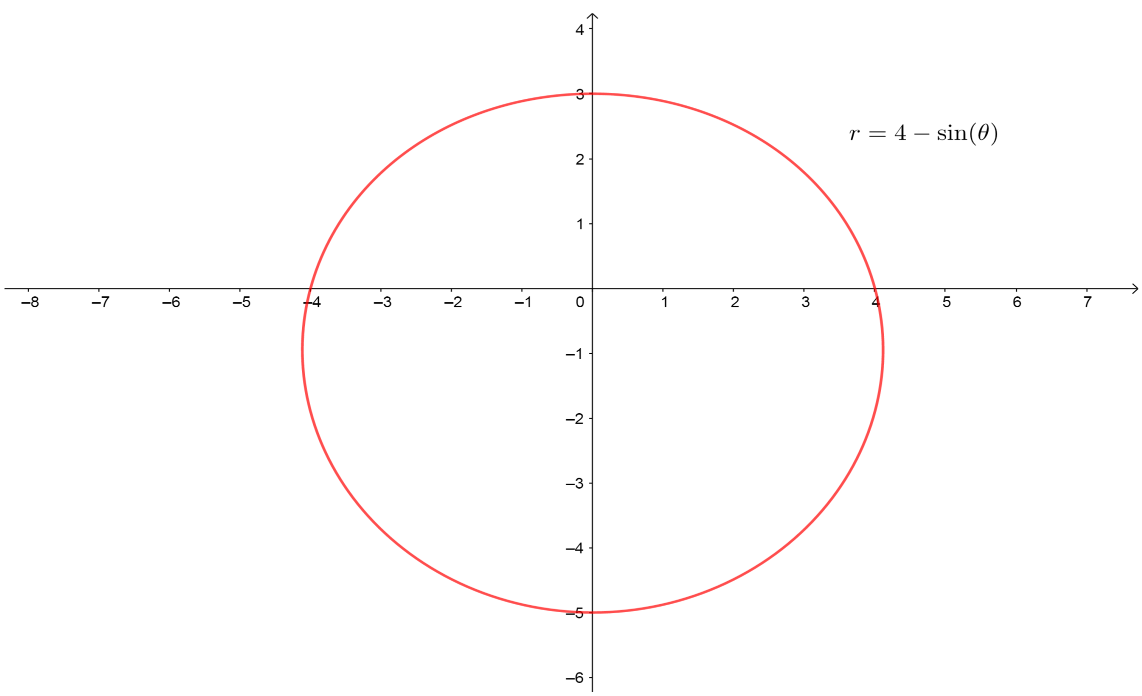
Juan López Linares

Setembro 2020

Problema: Esboce a curva $r(\theta) = 4 - \text{sen}(\theta)$ e calcule a área limitada por ela.

Solução:
A figura a seguir ilustra o gráfico da função polar.

Figura 1: Versão no Geogebra clicando aqui.



Usaremos a fórmula para calcular área em polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_i}^{\theta_f} r^2 d\theta.$$

Algebricamente podemos mostrar que existe simetria em relação ao eixo y trocando θ por $\pi - \theta$:

$$r(\pi - \theta) = 4 - \text{sen}(\pi - \theta) = 4 + \text{sen}(-\theta) = 4 - \text{sen}(\theta) = r(\theta).$$

Usamos que adicionar π no argumento das funções seno ou cosseno faz a função mudar de sinal e que a função seno é ímpar.

Isto é, bastará calcular a área no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e multiplicar por 2:

$$A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(4 - \text{sen}(\theta)\right)^2 d\theta,$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(16 - 8\text{sen}(\theta) + \text{sen}^2(\theta)\right) d\theta. \tag{1}$$

A integral de uma função ímpar (quando f(-x)=-f(x) para todo x) entre limites de integração simétricos é zero. No nosso caso a função seno:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(\theta) d\theta = 0.$$

Logo, voltando em (1) temos:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(16 + \text{sen}^2(\theta)\right) d\theta.$$

A integral de uma função par (quando f(-x)=f(x) para todo x) entre limites de integração simétricos é duas vezes a integração na metade do intervalo. No nosso caso a função no argumento da integral anterior é par:

$$A = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(16 + \text{sen}^2(\theta)\right) d\theta. \tag{2}$$

Usando a identidade do cosseno do ângulo duplo (demonstração clicando aqui)

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta),$$

e a identidade trigonométrica fundamental

$$\cos^2(\theta) = 1 - \text{sen}^2(\theta),$$

podemos escrever

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\text{sen}^2(\theta).$$

Segue que:

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right) \tag{3}$$

Voltando com (3) em (2) temos:

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)\right) d\theta,$$

$$A = 33\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta,$$

$$A = 33\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Mas o último somando é zero e concluímos que

$$A = \frac{33\pi}{2}.$$