17.2 SOLUÇÕES

Revisão técnica: Ricardo Miranda Martins – IMECC – Unicamp

1. A equação auxiliar é $r^2 - r - 6 = (r-3)(r+2) = 0$, então a solução complementar é $y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$. Tente uma solução particular $y_p(x) = A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x$, então $y_p' = 3B\cos 3x - 3A\,\text{sen}\,3x$ e $y_p'' = -9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x$. A substituição fornece

$$(-9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x) - (3B\cos 3x - 3A\,\text{sen}\,3x) - 6(A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x) = \cos 3x \Rightarrow$$

$$\cos 3x = (-15A - 3B)\cos 3x + (3A - 15B)\,\text{sen}\,3x.$$

Logo $-15A - 3B = 1$ e $3A - 15B = 0 \Rightarrow A = -\frac{5}{78}$, $B = -\frac{1}{78}$ e a solução geral é

$$y(x) = y_c + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} - \tfrac{5}{78}\cos 3x - \tfrac{1}{78}\,\text{sen}\,3x.$$

2. A equação auxiliar é $r^2 + 2r + 2 = 0$ com raízes $-1 \pm i$, então a solução complementar é $y_c(x) = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x)$. Para a solução particular, tente $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Logo, $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ e $y_p'' = 6Ax + 2B$. A substituição para a equação diferencial fornece

$$(6Ax + 2B) + 2\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + 2\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = x^3 - 1 \Rightarrow$$

$$x^3 - 1 = 2Ax^3 + (6A + 2B)x^2 + (6A + 4B + 2C)x + (2B + 2C + 2D)$$

A comparação de coeficientes fornece $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{3}{2}$, $D = -\frac{1}{2}$. Logo, a solução geral é

$$y(x) = y_c + y_p = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x) + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

3. A solução complementar é $y_c(x) = e^{2x}(c_1 x + c_2)$, então tente uma solução particular $y_p(x) = Ae^{-x}$. Então $y_p'' = y_p' = y_p = Ae^{-x}$ e a substituição para a equação diferencial fornece $Ae^{-x} + 4Ae^{-x} + 4Ae^{-x} = e^{-x}$ $\Rightarrow A = \frac{1}{9}$. Logo, a solução geral é $y(x) = e^{2x}(c_1 x + c_2) + \frac{1}{9}e^{-x}$.

4. A solução complementar é $y_c(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$. Uma vez que os argumentos de seno e cosseno no lado direito da equação diferencial são os mesmos (ambos x), tente $y_p(x) = C\cos x + D\,\text{sen}\,x$. Então $y_p' = -C\,\text{sen}\,x + D\cos x$ e $y_p'' = -C\cos x - D\,\text{sen}\,x$. A substituição para a equação diferencial fornece

$$-C\cos x - D\,\text{sen}\,x - 7(-C\,\text{sen}\,x + D\cos x) + 12(C\cos x + D\,\text{sen}\,x) = \text{sen}\,x - \cos x \Rightarrow$$

$$(11C - 7D)\cos x + (7C + 11D)\,\text{sen}\,x = \text{sen}\,x - \cos x$$

$\Rightarrow 11C - 7D = -1$ e $7C + 11D = 1$. Logo, $y_p(x) = -\frac{2}{85}\cos x + \frac{9}{85}\,\text{sen}\,x$ e a solução geral é $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} - \frac{2}{85}\cos x + \frac{9}{85}\,\text{sen}\,x$.

5. A solução complementar é $y_c(x) = c_1\cos 6x + c_2\,\text{sen}\,6x$. Tente $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Então $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$; a substituição fornece $2A + 36\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 2x^2 - x$. $A = \frac{1}{18}$, $B = -\frac{1}{36}$, $C = -\frac{1}{324}$. A solução geral é $y(x) = c_1\cos 6x + c_2\,\text{sen}\,6x + \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{36}x - \frac{1}{324}$.

6. Uma vez que as raízes de $r^2 - 2r + 5 = 0$ são $1 \pm 2i$, $y_c(x) = e^x(c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x)$. Para $y'' - 2y' + 5y = x$ tente $y_{p_1}(x) = Ax + B$. Então $0 - 2A + 5(Ax + B) = x$, e, assim $y_{p_1}(x) = \frac{1}{5}x + \dfrac{2}{25}$. Para $y'' - 2y' + 5y = \text{sen}\,3x$ tente $y_{p_2}(x) = A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x$. Então $y_{p_2}' = -3A\,\text{sen}\,3x + 3B\cos 3x$ e $y_{p_2}'' = -9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x$. A substituição para a equação diferencial fornece

$$-9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x + 6A\,\text{sen}\,3x - 6B\cos 3x + 5A\cos 3x + 5B\,\text{sen}\,3x = \text{sen}\,3x$$

Portanto, $(-9A - 6B + 5A) = 0$ e $(-9B + 6A + 5B) = 1$, então $A = \frac{3}{26}$ e $B = -\frac{1}{13}$. Logo, a solução geral é

$$y(x) = e^x(c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x) + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{25} + \tfrac{3}{26}\cos 3x - \tfrac{1}{13}\,\text{sen}\,3x$$

Mas $1 = y(0) = c_1 + \frac{2}{25} + \frac{3}{26} \Rightarrow c_1 = \frac{523}{650}$, $2 = y'(0) = c_1 + 2c_2 + \frac{1}{5} - \dfrac{3}{13} \Rightarrow c_2 = \frac{797}{1300}$. Portanto, a solução para o problema do valor inicial é

$$y(x) = e^x\left[\tfrac{523}{650}\cos 2x + \tfrac{797}{1300}\,\text{sen}\,2x\right] + \tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{25} + \tfrac{3}{26}\cos 3x - \tfrac{1}{13}\,\text{sen}\,3x$$

7. $y_c(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}x$. Tente $y_p(x) = e^x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x)$, então $y_p' = e^x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x - A\,\text{sen}\,x + B\cos x)$ e $y_p'' = e^x(2B\cos x - 2A\,\text{sen}\,x)$. A substituição para a equação diferencial fornece

$$e^x(2B\cos x - 2A\,\text{sen}\,x) + 2e^x(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) = e^x\,\text{sen}\,x$$

de modo que $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$. Logo, a solução geral é $y(x) = c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{2}x + \frac{1}{4}e^x(-\cos x + \text{sen}\,x)$. Mas $1 = y(0) = c_1 - \frac{1}{4} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{4}$ e $1 = y'(0) = \sqrt{2}c_2 + 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto, a solução para o problema do valor inicial é

$$y(x) = \tfrac{5}{4}\cos\sqrt{2}x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\sqrt{2}x + \tfrac{1}{4}e^x(-\cos x + \text{sen}\,x).$$

8. $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. Tente $y_p(x) = (Ax + B)e^{3x}$. Então $y_p' = e^{3x}(A + 3Ax + 3B)$ e $y_p'' = e^{3x}(3A + 3A + 9Ax + 9B)$. A substituição para a equação diferencial fornece $e^{3x}[9Ax + 9B + 6A - (Ax + B)] = xe^{3x}$, então $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{3}{32}$ e a solução geral é $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}\right)e^{3x}$. Mas $0 = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{32}$, $1 = y'(0) = c_1 - c_2 - \frac{9}{32} + \frac{1}{8}$, de modo que a solução para o problema do valor inicial é $y(x) = \frac{5}{8}e^x - \frac{17}{32}e^{-x} + e^{3x}\left(\frac{1}{8}x - \frac{3}{32}\right)$.

9. $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$. Para $y'' - 3y' + 2y = 2x$ tente $y_{p_1}(x) = Ax + B$. A substituição para a equação diferencial fornece $-3A + 2Ax + 2B = 2x$, então $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$.
Para $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$, tente $y_{p_2} = Ce^{-2x}$. A substituição para a equação diferencial fornece $4Ae^{-2x} - 3\left(-2Ae^{-2x}\right) + 2Ae^{-2x} = -e^{-2x}$, então $C = -\frac{1}{12}$. Logo, a solução geral é $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x + \frac{3}{2} - \frac{1}{12}e^{-2x}$. Mas $1 = y(0) = c_1 + c_2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$ e $0 = y'(0) = c_1 + 2c_2 + 1 + \frac{1}{6}$, então $c_1 = \frac{1}{3}$ e $c_2 = -\frac{3}{4}$. Logo, a solução para o problema de inicial valor é $y(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{3}{4}e^{2x} + x + \frac{3}{2} - \frac{1}{12}e^{-2x}$.

10. Uma vez que as raízes da equação auxiliar são complexas, só precisamos tentar
$y_p(x) = \left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right)e^{2x}$.

11. Para $y'' + 6y' + 2y = x^3$, tente $y_{p_1}(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ e para $y'' + 6y' + 2y = e^x \operatorname{sen} 2x$, tente $y_{p_2}(x) = e^x(A\cos 2x + B\operatorname{sen} 2x)$.

12. Uma vez que $y_c(x) = e^x(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x)$, tentamos $y_p(x) = xe^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$.

13. Aqui $y_c(x) = c_1 + c_2 e^{-3x}$. Para $y'' + 3y' = 1$, tente $y_{p_1}(x) = xA$, de modo que y_{p_1} não é uma solução da equação complementar. Para $y'' + 3y' = xe^{-3x}$, tente $y_{p_2}(x) = x(Ax + B)e^{-3x}$.