PVI em Eq. Não Homogênea

Juan López Linares

September 2020

Problema: Resolver o P.V.I. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = x + \text{sen}(3x)$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.
Solução:

1 Equação diferencial homogênea correspondente

Resolvemos a equação diferencial homogênea correspondente:

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0.$$

Propondo uma solução de tipo exponencial $y(t) = e^{rt}$ encontramos a equação caraterística: $r^2 - 2r + 5 = 0$.
O discriminante é: $\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$.
Logo,

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i.$$

Como o discriminante é negativo a equação se classifica como tipo III com $\alpha = 1$ e $\beta = 2$.
As soluções básicas são da forma $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\text{sen}(\beta x)$.
Isto é:

$$y_{gh}(x) = e^x[C_1 \cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)]. \tag{1}$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$.

2 Solução particular da equação diferencial não homogênea

Pelo princípio de superposição procuramos uma solução particular da forma:

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x). \tag{2}$$

Onde a) $y_{p1}(x)$ é solução particular de $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = x$ e b) $y_{p2}(x)$ é solução particular de $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \text{sen}(3x)$.

a) $y_{p1}(x)$ é solução particular de

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = x. \tag{3}$$

Como o termo independente é um polinômio de grau um fazemos a proposta

$$y_{p1}(x) = A_0 + A_1 x. \tag{4}$$

Derivando duas vezes temos

$$y'_{p1}(x) = A_1, \tag{5}$$

$$y''_{p1}(x) = 0. \tag{6}$$

Substituindo (6), (5) e (4) em (3) segue:

$$0 - 2A_1 + 5(A_0 + A_1 x) = x,$$

$$(-2A_1 + 5A_0) + 5A_1 x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x.$$

Para que a última equação seja verdadeira para todo x devemos ter

$$\begin{aligned} -2A_1 + 5A_0 &= 0, \\ 5A_1 &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $A_1 = \frac{1}{5}$ e $A_0 = \frac{2}{25}$. Substituindo os valores anteriores em (4) temos:

$$y_{p1}(x) = \frac{2}{25} + \frac{1}{5}x. \tag{7}$$

b) $y_{p2}(x)$ é solução particular de

$$y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \mathrm{sen}(3x). \tag{8}$$

Como o termo independente é uma função seno fazemos uma proposta com seno e cosseno:

$$y_{p2}(x) = B_1 \cos(3x) + B_2 \mathrm{sen}(3x). \tag{9}$$

Derivando duas vezes temos

$$y'_{p2}(x) = -3B_1 \mathrm{sen}(3x) + 3B_2 \cos(3x), \tag{10}$$

$$y''_{p2}(x) = -9B_1 \cos(3x) - 9B_2 \mathrm{sen}(3x). \tag{11}$$

Substituindo (11), (10) e (9) em (8) segue:

$$\begin{aligned} &- 9B_1 \cos(3x) - 9B_2 \mathrm{sen}(3x) - 2[-3B_1 \mathrm{sen}(3x) + 3B_2 \cos(3x)]+ \\ &\qquad + 5[B_1 \cos(3x) + B_2 \mathrm{sen}(3x)] = \mathrm{sen}(3x). \end{aligned}$$

Agrupando os termos com seno e cosseno encontramos:

$$(-4B_1 - 6B_2)\cos(3x) + (6B_1 - 4B_2)\mathrm{sen}(3x) = 0 \cdot \cos(3x) + 1 \cdot \mathrm{sen}(3x).$$

Para que a última equação seja verdadeira para todo x devemos ter

$$-4B_1 - 6B_2 = 0 \tag{12}$$
$$6B_1 - 4B_2 = 1. \tag{13}$$

De (12) temos $B_1 = -\frac{3}{2}B_2$. Substituindo o valor anterior em (13) encontramos $B_2 = -\frac{1}{13}$. Logo, $B_1 = \frac{3}{26}$.

Substituindo os valores anteriores em (9) temos:

$$y_{p2}(x) = \frac{3}{26}\cos(3x) - \frac{1}{13}\text{sen}(3x). \tag{14}$$

Voltando com (7) e (14) em (2) encontramos a solução particular da equação não homogênea dada no enunciado do problema:

$$y_p(x) = \frac{2}{25} + \frac{1}{5}x + \frac{3}{26}\cos(3x) - \frac{1}{13}\text{sen}(3x). \tag{15}$$

A solução geral da equação não homogênea é:

$$y_{gnh}(x) = y_{gh}(x) + y_p(x),$$

$$y_{gnh}(x) = e^x[C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)] + \\ + \frac{2}{25} + \frac{1}{5}x + \frac{3}{26}\cos(3x) - \frac{1}{13}\text{sen}(3x). \tag{16}$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$.

3 P.V.I.

Usamos a primeira restrição $y(0) = 1$ em (16):

$$y_{gnh}(0) = 1 = e^0[C_1\cos(0) + C_2\text{sen}(0)] + \\ + \frac{2}{25} + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{3}{26}\cos(0) - \frac{1}{13}\text{sen}(0),$$

$$1 = C_1 + \frac{2}{25} + \frac{3}{26} = C_1 + \frac{127}{650},$$

$$C_1 = \frac{523}{650}. \tag{17}$$

Antes de usar a segunda restrição devemos derivar (16):

$$y'_{gnh}(x) = e^x[C_1\cos(2x) + C_2\text{sen}(2x)] + e^x[-2C_1\text{sen}(2x) + 2C_2\cos(2x)] + \\ + \frac{1}{5} - \frac{9}{26}\text{sen}(3x) - \frac{3}{13}\cos(3x),$$

$$y'_{gnh}(x) = e^x[(C_1 + 2C_2)\cos(2x) + (C_2 - 2C_1)\text{sen}(2x)] + \frac{1}{5} - \\ - \frac{9}{26}\text{sen}(3x) - \frac{3}{13}\cos(3x). \quad (18)$$

Neste ponto usamos a segunda restrição $y'(0) = 2$ em (18):

$$y'_{gnh}(0) = 2 = e^0[(C_1 + 2C_2)\cos(0) + (C_2 - 2C_1)\text{sen}(0)] + \frac{1}{5} - \\ - \frac{9}{26}\text{sen}(0) - \frac{3}{13}\cos(0),$$

$$2 = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = C_1 + 2C_2 - \frac{2}{65}.$$

Usando (17) na equação anterior encontramos:

$$2 = \frac{523}{650} + 2C_2 - \frac{2}{65} = 2C_2 + \frac{503}{650},$$

$$2 - \frac{503}{650} = \frac{797}{650} = 2C_2,$$

$$C_2 = \frac{797}{1300}. \quad (19)$$

Substituindo (17) e (19) em (16) concluímos que

$$y_{P.V.I.}(x) = e^x[\frac{523}{650}\cos(2x) + \frac{797}{1300}\text{sen}(2x)] + \\ + \frac{2}{25} + \frac{1}{5}x + \frac{3}{26}\cos(3x) - \frac{1}{13}\text{sen}(3x).$$