Eq. Não Homogênea Seno Ressonância

Juan López Linares

September 2020

Problema: Resolver a equação diferencial não homogênea

$$y''(x) + 16y(x) = \text{sen}(4x).$$

Solução:
i) Resolvemos a equação diferencial homogênea correspondente:

$$y''(x) + 16y(x) = 0.$$

Propondo uma solução de tipo exponencial $y(t) = e^{rt}$ encontramos a equação caraterística: $r^2 + 16 = 0$. Logo, $r_{1,2} = \pm 4i$. A equação se classifica como tipo III.

A solução geral é da forma:

$$y_{gh}(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \text{sen}(4x).$$

Onde C_1 e $C_2 \in \mathbb{R}$.

ii) Seguindo o método dos coeficientes indeterminados iremos procurar uma solução particular. A primeira tentativa seria da forma:

$$y_p(x) = E_1 \cos(4x) + E_2 \text{sen}(4x).$$

Porém, a solução particular não pode ter a mesma forma da equação homogênea. Uma função que satisfaz a equação homogênea não pode satisfazer ao mesmo tempo a equação não homogênea. Para superar esse conflito multiplicamos a equação anterior por x:

$$y_p(x) = E_1 x \cos(4x) + E_2 x \text{sen}(4x). \quad (eq.1)$$

Usando a regra da derivada de um produto de funções temos

$$y_p'(t) = E_1 \cos(4x) - 4E_1 x \text{sen}(4x) + E_2 \text{sen}(4x) + 4E_2 x \cos(4x).$$

$$y_p'(t) = (E_1 + 4E_2 x) \cos(4x) + (E_2 - 4E_1 x) \text{sen}(4x). \quad (eq.2)$$

Usando novamente a regra da derivada de um produto de funções temos:

$$y_p''(t) = 4E_2 \cos(4x) - 4(E_1 + 4E_2 x) \text{sen}(4x) - 4E_1 \text{sen}(4x) + 4(E_2 - 4E_1 x) \cos(4x),$$

$$y_p''(t) = 8E_2\cos(4x) - 16E_2 x\mathrm{sen}(4x) - 8E_1\mathrm{sen}(4x) - 16E_1 x\cos(4x). \quad (eq.3)$$

Substituindo (eq. 1) e (eq. 3) em

$$y''(x) + 16y(x) = \mathrm{sen}(4x)$$

encontramos:

$$8E_2\cos(4x) - 8E_1\mathrm{sen}(4x) = 0\cdot\cos(4x) + 1\cdot\mathrm{sen}(4x).$$

Procuramos os valores de E_1 e E_2 para os quais a equação anterior é válida para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, devemos ter:

$$8E_2 = 0,$$

$$-8E_1 = 1.$$

Segue que $E_1 = -\frac{1}{8}$ e $E_2 = 0$. Substituindo o resultado anterior na (eq.1) encontramos a solução particular

$$y_p(x) = -\frac{1}{8}x\cos(4x).$$

Concluímos que

$$y_{gnh}(x) = C_1\cos(4x) + C_2\mathrm{sen}(4x) - \frac{1}{8}x\cos(4x).$$