PVI, erro frequente na derivada de um produto de funções

Juan López Linares

25 de agosto de 2021

1 PVI, erro frequente na derivada de um produto de funções

Exercício 1. *Resolver o problema de valor inicial*

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

1.1 Solução

i) Resolvemos a equação diferencial homogênea:

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Propondo uma solução de tipo exponencial

$$y(x) = e^{rx}$$

encontramos a equação caraterística:

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

O discriminante é:

$$\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4.$$

Logo,

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i = \alpha \pm \beta i.$$

Como o discriminante é negativo a equação se classifica tipo III com $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

A solução geral é da forma

$$y_{gh}(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \mathrm{sen}(\beta x),$$

onde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Isto é,
$$y_{gh}(x) = e^x \left[C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x)\right] \tag{1}$$

ii) Lembramos que a derivada de um produto de funções se calcula como:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Usando a regra do produto para derivar (1) encontramos

$$y'_{gh}(x) = e^x \left[C_1 \cos(x) + C_2 \text{sen}(x)\right] + e^x \left[-C_1 \text{sen}(x) + C_2 \cos(x)\right].$$

Isto é,
$$y'_{gh}(x) = e^x \left[(C_2 + C_1) \cos(x) + (C_2 - C_1) \text{sen}(x)\right] \tag{2}$$

iii) Da primeira restrição $y(0) = 1$ avaliada em (1) temos:

$$1 = y(0) = e^0 \left[C_1 \cos(0) + C_2 \text{sen}(0)\right],$$

$$1 = y(0) = 1 \left[C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0\right],$$

$$C_1 = 1. \tag{3}$$

iv) Da segunda restrição $y'(0) = 2$ avaliada em (2) temos:

$$2 = y'(0) = e^0 \left[(C_2 + C_1) \cos(0) + (C_2 - C_1) \text{sen}(0)\right],$$

$$2 = y'(0) = 1 \cdot \left((C_2 + C_1) \cdot 1 + (C_2 - C_1) \cdot 0\right),$$

$$2 = C_2 + C_1.$$

Usando (3) na equação anterior encontramos

$$C_2 = 1. \tag{4}$$

Logo, das equações (1), (3) e (4) temos

$$y_{PVI}(x) = e^x \left[\cos(x) + \text{sen}(x)\right].$$