Funções linearmente independentes

Aula 1, Cálculo II

Prof. Juan López Linares

19 de agosto de 2021

Definição 1 (Funções linearmente independentes)**.** *Duas funções reais de variável real $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes (L.I.) no intervalo $I = (a, b)$ quando a única solução da equação:*

$$\lambda f(x) + \beta g(x) = 0 \quad \forall x \in I \tag{1}$$

é a solução trivial. Isto é, $(\lambda, \beta) = (0, 0)$. Caso contrário as funções são chamadas linearmente dependentes (L.D.).

Exemplo 1 (Funções linearmente dependentes, L.D.)**.** *Sejam $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$. Como $g(x) = \operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = 2f(x)$ existe uma solução, diferente da trivial, da equação (1). De fato,*

$$(\lambda, \beta) = (2, -1)$$

é uma solução. Ou seja, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ são linearmente dependentes (L.D.).

Exemplo 2 (Funções linearmente independentes, L.I.)**.** *Sejam $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$. Existe uma única solução da equação (1), a trivial:*

$$(\lambda, \beta) = (0, 0).$$

Ou seja, as funções $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são linearmente independentes (L.I.). Este resultado será provado após a demonstração da Proposição 1.

Definição 2 (Wronskiano)**.** *Supondo que existem as primeiras derivadas das funções reais de variável real, $f'(x)$ e $g'(x)$, e são contínuas em I, chamaremos Wronskiano ao determinante a seguir*

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

Proposição 1. *Duas funções reais de variável real $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes no intervalo $I = (a, b)$ quando $W(x) \neq 0$ para algum $x \in I$. Isto é,*

$$W(x) \neq 0 \Rightarrow f(x)\, \mathrm{e}\, g(x)\, L.I.$$

Operacionalmente calculamos $W(x)$ e caso seja diferente de zero, para algum $x \in I$, dizemos que f e g são L.I. em I.

Demonstração. Iremos provar a contrapositiva da proposição anterior. Se uma sentença é verdadeira, então sua contrapositiva é verdadeira (e vice-versa).

$$f(x)\, e\, g(x)\, L.D. \Rightarrow W(x) = 0.$$

Isto é, se $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente dependentes em I, então $W(x) = 0$ para $\forall x \in I$. Temos por hipótese que existe $\lambda \neq 0$ tal que $f(x) = \lambda g(x)$ para $\forall x \in I$. Segue que $f'(x) = \lambda g'(x)$ para $\forall x \in I$. O Wronskiano será

$$W\,(x) = \left| \begin{array}{cc} f\,(x) & g\,(x) \\ f'\,(x) & g'\,(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda g(x) & g(x) \\ \lambda g'(x) & g'\,(x) \end{array} \right| =$$

$$= \lambda g(x)g'(x) - \lambda g(x)g'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

$\square$

Exemplo 3 (uso da proposição anterior)**.** *Sejam* $f(x) = \text{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$.

$$W\,(x) = \left| \begin{array}{cc} f\,(x) & g\,(x) \\ f'\,(x) & g'\,(x) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \text{sen}(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & -\text{sen}(x) \end{array} \right| =$$

$$= -\text{sen}^2(x) - \cos^2(x) = -1 \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $W(x) \neq 0$ *então* $f(x) = \text{sen}(x)$ *e* $g(x) = \cos(x)$ *são L.I. para* $\forall x \in \mathbb{R}$.