Teoria dos Grupos - SFI 5823

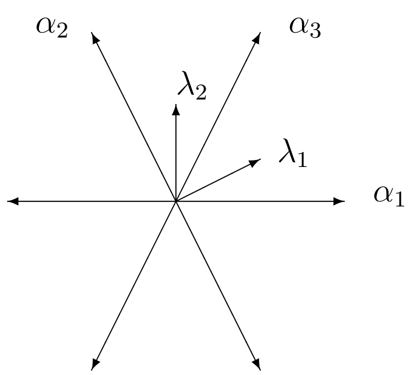
Trabalho 2 - 19/06/2023

Entrega: 26/06/2023

1. **(0,5)** O operador quadrático de Casimir em uma representação D de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$ é dado por

$$C_2^{(D)} = \sum_{i=1}^{\operatorname{rank}\mathcal{G}} D\left(H_i\right)\, D\left(H_i\right) + \sum_{\alpha>0} \frac{\alpha^2}{2} \left[D\left(E_\alpha\right)\, D\left(E_{-\alpha}\right) + D\left(E_{-\alpha}\right)\, D\left(E_\alpha\right)\right]$$

Calcule a matriz correspondente a $C_2^{(D)}$ para a álgebra $\mathcal{G} = SU(3)$, em uma representação D que é completamente redutível nas representações irredutíveis cujos pesos máximos são λ_1 e $2\,\lambda_1$.



2. **(0,5)** Calcule o caráter do elemento $g = \exp\left(i\left(\theta_1\, H_1 + \theta_2\, H_2\right)\right)$ do grupo $SU(3)$, na representação cujo peso máximo é λ_1 (veja figura do problema 1), e onde H_i, $i = 1, 2$, são os geradores da subálgebra de Cartan.

3. **(0,5)** A álgebra de Lie do grupo $SO(5)$ é definida pelas matrizes reais antisimétricas 5×5, multiplicadas pela unidade imaginária i, ou seja são matrizes hermitianas. Encontre as matrizes que formam uma base de uma subálgebra de Cartan de $SO(5)$.

4. **(1,0)** Considere a representação irredutível de $SU(3)$ cujo peso máximo é $2\lambda_1$ (veja figura do problema 1).

   (a) Determine a dimensão desta representação

   (b) Determine os pesos desta representação e suas multiplicidades

   (c) Sabendo-se que o isospin T_3, hipercarga Y e carga elétrica Q são dados por

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{2\alpha_1 \cdot H}{\alpha_1^2} \qquad Y = \lambda_2 \cdot H \qquad Q = T_3 + \frac{1}{2}Y$$

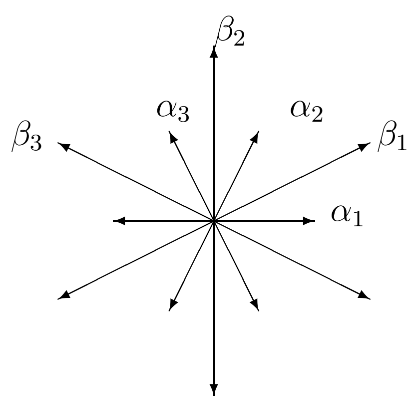
   determine o isospin, hipercarga e carga elétrica das partículas correspondendo aos estados desta representação.

   (d) Determine as matrizes dos geradores na base de Chevalley para esta representação.

5. **(0,5)** O diagrama de raízes de G_2 é dado na figura abaixo. Considere os subespaços

$$\mathcal{G}_1 \equiv \{H_a, E_{\pm\alpha_i}\} \; ; \qquad\qquad \mathcal{G}_2 \equiv \{H_a, E_{\pm\beta_i}\}$$

   onde $a = 1, 2,\ i = 1, 2, 3$. Verifique se estes subespaços constituem subálgebras de G_2. Em caso afirmativo, identifique estas subálgebras.



6. **(0,5)** Construa um tensor de ordem 3, totalmente simétrico e invariante pela representação adjunta do grupo $SU(3)$. Utilizando este tensor construa o operador de Casimir correspondente e calcule-o na representação tripleto de $SU(3)$.

7. **(0,5)** Considere duas representações irredutíveis de $SU(2)$, $D^{(1)}$ e $D^{(1/2)}$, com pesos mais altos $j = 1$ e $j = 1/2$ respectivamente, e construa a representação $D^{\otimes}$ que é o produto tensorial daquelas duas representações.

   (a) Qual a dimensão de $D^{\otimes}$?

   (b) Quais são os estados de $D^{\otimes}$, em termos dos estados de $D^{(1)}$ e $D^{(1/2)}$, e quais os seus autovalores de $D^{\otimes}(T_3)$?

   (c) $D^{\otimes}$ é irredutível? Em caso negativo, em quais irredutíveis de $SU(2)$ ela se decompõe, e quais os estados de cada uma destas componentes irredutíveis?

8. **(0,5)** Considere dois conjuntos A e B de vetores em um espaço Euclideano de dimensão 3, dados por

$$
\begin{aligned}
A &= \{\pm\vec{e}_i\,,\, \pm(\vec{e}_i + \vec{e}_j)\ ,\ i \neq j\ ;\ \ i,j = 1,2,3\} \qquad \text{(12 vetores)} \\
B &= \{\pm\vec{e}_i\,,\, \pm(\vec{e}_i - \vec{e}_j)\ ,\, \pm(\vec{e}_i + \vec{e}_j)\ ,\ i \neq j\ ;\ \ i,j = 1,2,3\} \qquad \text{(18 vetores)}
\end{aligned}
$$

   onde $\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$, constitui um conjunto de 3 vetores unitários e ortogonais entre si, i.e. $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$.

   (a) Verifique se cada um destes conjuntos de vetores pode constituir um conjunto de raízes de uma álgebra de Lie. Justifique sua resposta.

   (b) No(s) caso(s) afirmativo(s) determine um conjunto de raízes simples, construa a matriz de Cartan e desenhe o diagrama de Dynkin.

9. **(0,5)** Ao fazermos o produto tensorial de duas representações irredutíveis D e D' de um grupo de Lie G, obtemos uma representação $D^{\otimes} \equiv D \otimes D'$ que em geral não é irredutível. Faça a decomposição das seguintes representações $D^{\otimes}$ em termos de representações irredutíveis do mesmo grupo

   (a) $D^{\otimes} = 3 \otimes 3$, onde 3 é a representação tripleto (adjunta) de $SU(2)$.

   (b) $D^{\otimes} = 3 \otimes 3$, onde 3 é a representação tripleto de $SU(3)$, com peso máximo λ_1 (veja diagrama do problema 1).

   (c) $D^{\otimes} = \bar{3} \otimes \bar{3}$, onde $\bar{3}$ é a representação anti-tripleto de $SU(3)$, com peso máximo λ_2 (veja diagrama do problema 1).

   (d) $D^{\otimes} = 3 \otimes \bar{3}$, onde 3 e $\bar{3}$ são as representações tripleto e anti-tripleto de $SU(3)$, cujos pesos máximos são λ_1 e λ_2 respectivamente (veja diagrama do problema 1).

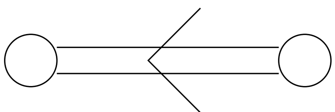
10. **(1,0)** Considere a álgebra de Lie associada ao diagrama de Dynkin abaixo, tome a representação correpondente ao peso máximo $\lambda = \lambda_2$, onde λ_2 é o peso fundamental associado ao ponto 2 do diagrama.

    (a) Calcule a dimensão desta representação

    (b) Calcule os pesos desta representação e suas multiplicidades

    (c) Construa as matrizes dos geradores da álgebra nesta representação.

    (d) Calcule os caráters dos elementos do grupo nesta representação.



1 2

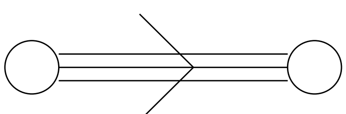
11. **(1,0)** Considere o diagrama de Dynkin do problema 10.

    (a) Construa a matriz de Cartan correspondente

    (b) Construa o diagrama de raízes correspondente

    (c) Construa as relações de comutação da álgebra de Lie correspondente, determinando inclusive os cociclos $\varepsilon(\alpha, \beta)$.

12. **(0,5)** Considere o seguinte diagrama de Dynkin



1 2

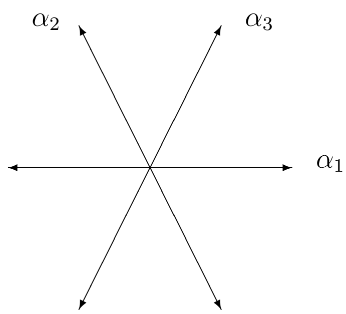
    (a) Construa a matriz de Cartan associada a este diagrama (note a numeração dos vértices do diagrama).

    (b) Construa todas as raízes da álgebra de Lie associada.

    (c) Qual o rank e dimensão desta álgebra?

13. **(0,5)** Considere a álgebra de $SU(3)$, de dimensão 8 e rank 2, com sistema de raízes dado na figura abaixo. Os geradores da subálgebra de Cartan são denotados H_i, $i = 1, 2$, e os operadores degrau (step) são $E_{\pm\alpha_a}$, $a = 1, 2, 3$. O espaço vetorial de dimensão 8 da álgebra de $SU(3)$ é o espaço de sua representação adjunta. No entanto, este mesmo espaço define uma representação de qualquer de suas subálgebras (sob a ação adjunta), inclusive da subálgebra $SU(2)$ associada à raíz α_1. Em geral a representação adjunta de uma álgebra de Lie não é uma representação irredutível de uma dada subálgebra. Determine as representações irredutíveis da subálgebra $SU(2)$, associada à raíz α_1, contidas na representação adjunta de $SU(3)$.

Nota: Temos que $H_1 \sim \alpha_1 \cdot H$, é o gerador da subálgebra de Cartan do $SU(2)$ associado à raíz α_1, e $H_2 \sim v \cdot H$, com $v \cdot \alpha_1 = 0$.



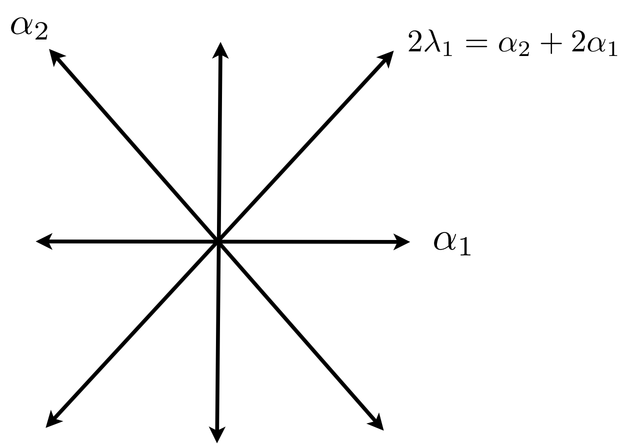
14. **(0,5)** Considere a representação irredutível de $SO(5)$ cujo peso máximo é $2\,\lambda_1$ (veja diagrama abaixo).

   (a) Calcule a dimensão desta representação.

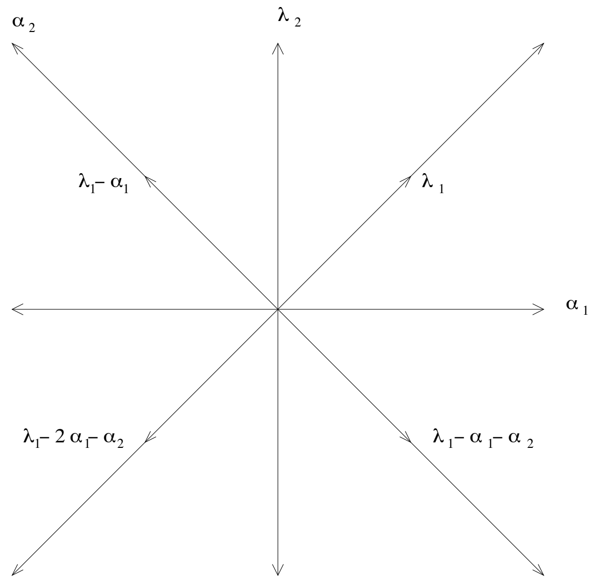
   (b) Calcule os pesos desta representação.

   (c) Calcule as multiplicidades destes pesos.

   (d) Decomponha esta representação em representações irredutíveis da subalgebra $SU(2)$ associada à raiz α_1, gerada por $H_{\alpha_1} = \frac{2\alpha_1 \cdot H}{\alpha_1^2}$, E_{α_1} e $E_{-\alpha_1}$.



15. **(0,5)** Calcule o caráter do elemento $g = \exp\left(i\left(\theta_1 H_{\alpha_1} + \theta_2 H_{\alpha_2}\right)\right)$ do grupo $SO(5)$, na representação de dimensão 4, cujo peso máximo é λ_1 (veja figura abaixo), e onde $H_{\alpha_a} = \frac{2\alpha_a \cdot H}{\alpha_a^2}$, $a = 1, 2$, são os geradores da subálgebra de Cartan na base de Chevalley. Os caráters são reais ou complexos?



16. **(1,0)** Considere um sistema físico que tem o grupo $SU(3)$ como grupo de simetria e onde a energia é dada pelo operador quadrático de Casimir do grupo $SU(3)$, i.e. $\mathcal{H} = C_2^{(D)}$. Com isso queremos dizer que existem transformações atuando nos estados do sistema que formam uma representação D do grupo $SU(3)$, neste espaço de estados. Obviamente, estados conectados por transformações de $SU(3)$ têm a mesma energia, i.e.

$$\mid \psi_1\rangle = D\,(g) \mid \psi_0\rangle \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} \mid \psi_1\rangle = E \,\mid \psi_1\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H} \mid \psi_0\rangle = E \,\mid \psi_0\rangle$$

pois $[\mathcal{H}\,,\, D\,(g)] = 0$, com $g \in SU(3)$. A representação D, formada pelos estados do sistema, quebra em representações irredutíveis de $SU(3)$.

(a) Os estados de energias mais baixas constituem as representações, singleto, tripleto, anti-tripleto e adjunta de $SU(3)$, cujos pesos máximos são respectivamente $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ e $\lambda = \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. Calcule as energias $\mathcal{H}$ destes estados, e a degenerescência destas energias.

(b) Suponha que um campo externo é aplicado ao sistema, quebrando a simetria $SU(3)$, e levando a uma energia da forma

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \varepsilon\, D\,(\delta \cdot H)$$

onde $\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha = \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_3$, e onde ε é um parâmetro muito pequeno. Calcule a energia $\mathcal{H}'$ dos estados que pertencem às representações singleto, tripleto e anti-tripleto. (Estamos assumindo que os estados em ordem ε de perturbação são os mesmos do sistema não perturbado)