LIMITES E DERIVADAS - PARTE 4: APLICAÇÕES

RICARDO BIANCONI

1. Introdução

Estudamos agora aplicações de derivadas.

A primeira questão refere-se ao problema de achar máximos e mínimos de uma função (um problema de *otimização*), e a segunda consite num estudo qualitativo de gráficos de funções (crescimento, decrescimento e curvatura).

Como preliminar, apresentamos uma aplicação da derivada no cálculo de limites com indeterminações.

Proposição 1 (Regra de L'Hospital)**.** Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, com $a \in \mathbb{R}$, ou $a = -\infty$, ou $a = +\infty$. Então, se existirem os limites, vale as igualdade

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

O mesmo vale para limites laterais, e também para os casos em que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (ou $-\infty$) e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ou $-\infty$).

Observação 1. Essa regra aplica-se nos casos de indeterminações dos tipos

$$\frac{0}{0}; \frac{\pm\infty}{\pm\infty};$$

as indeterminações do tipo $0 \times \infty$ devem ser transformadas numa das duas acima. Por exemplo, se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$, então podemos transformar o produto $f(x)g(x)$ em uma das duas frações (a que for mais conveniente):

$$\frac{f(x)}{1/g(x)}; \text{ ou } \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Date: 2023.

Observação 2. Não confunda essa regra com a derivada de um quociente de funções!

Exemplo 1. Para funções racionais, essa regra dá bons resultados:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{2x-5}=\frac{1}{3}.$$

Exemplo 2. Essa regra não funciona bem com potência não inteiras. Se aplicarmos a Regra de L'Hospital no limite a seguir, não conseguimos nos livrar da indeterminação:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x/\sqrt{x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=?!$$

Alguns limites com exponenciais e logaritmos são mais fáceis de calcular com a Regra de L'Hospital.

Exemplo 3. Para qualquer $n>0$, vale que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty,$$

pois se $n=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}e^x/x=\lim\limits_{x\to\infty}e^x/1=\infty$; para $n=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}e^x/x^2=\lim\limits_{x\to\infty}e^x/(2x)=\infty$ (pelo caso anterior); e assim por diante.

Exemplo 4. Para qualquer $n>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^n=0$, pois se $n=1$,

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Aqui apareceu a indeterminação do tipo $0\times(-\infty)$. Veja que escolhemos transformar $x\ln x$ na fração $(\ln x)/(1/x)$, e não na fração $x/(1/\ln x)$ porque nessa forma a Regra de L'Hospital não simplificaria o limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{1/\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{-1/x(\ln x)^2}=\lim_{x\to 0^+}-x(\ln x)^2=?!$$

Para $n=2$, temos

$$\lim_{x\to 0^+}x(\ln x)^2=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)^2}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2(\ln x)/x}{-1/x^2}=-2\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0,$$

e assim por diante, sempre recaindo nos casos já resolvidos.

Exemplo 5. Para cada $n > 0$, vale que $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^n}{x} = 0$. Basta aplicar a Regra de L'Hospital para $n = 1, 2 \ldots,$ como feito acima.

2. Máximos e Mínimos

Citamos alguns resultados teóricos necessários ao entendimento das aplicações. O primeiro deles vem sem demonstração, pois envolve uma análise profunda das propriedades de $\mathbb{R}$.

Proposição 2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem pontos $x_0, x_1 \in [a, b]$, tais que para todo $x \in [a, b]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$.

Observação 3. Isso significa que a função f assume um valor máximo e um valor mínimo no intervalo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Nas aplicações,

Proposição 3 (Teorema de Rolle)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, que é derivável em todo ponto x, com $a < x < b$. Se $f(a) = f(b)$, então existe c, tal que $a < c < b$ e $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se $f(x)$ for constante no intervalo $[a, b]$, então para qualquer $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$, satisfaz a condição $f'(c) = 0$.

Se $f(x)$ não for constante nesse intervalo, então existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $a < c < b$ e $f(c)$ é um valor máximo, ou mínimo nesse intervalo. Se for máximo,

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} \geq 0, \text{ pois } f(c+t) \leq f(c) \text{ e } t < 0,$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} \leq 0, \text{ pois } f(c+t) \leq f(c) \text{ e } t > 0,$$

e, como f é derivável em $x = c$, os limites laterais têm que ser iguais. A única possibilidade para que isso ocorra é que o limite $f'(c) = 0$.

O caso em que $f(c)$ seja um valor mínimo segue de modo análogo. □

Uma consequência importante do Teorema de Rolle é:

Proposição 4 (Teorema do Valor Médio–TVM)**.** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, que é derivável em todo ponto x, com $a < x < b$. Existe c, tal que $a < c < b$ e $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração. Aplicamos o Teorema de Rolle com a função

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Como $g(a) = f(a) = g(b)$, o Teorema de Rolle diz que existe c, com $a < c < b$, tal que $g'(c) = 0$, ou seja,

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Definição 1. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, é estritamente crescente (decrescente) se para todos $a, b \in I$, com $a < b$, vale $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Proposição 5 (Intervalos de Crescimento e Decrescimento)**.** Seja $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$ e o intervalo $[a, b]$ esteja contido em $\mathrm{Dom}(f)$. Se $f'(x) > 0$ (respectivamente, $f'(x) < 0$), para todo x, tal que $a < x < b$, então f é estritamente crescente (respectivamente, decrescente) no intervalo $[a, b]$.

Demonstração. Se a função f não fosse estritamente crescente no intervalo $[a, b]$, então existiriam $c, d \in [a, b]$, com $c < d$ e $f(d) \leq f(c)$. Pelo TVM, existe t, $c < t < d$, tal que $f'(t) = [f(d) - f(c)]/(d - c) \leq 0$, contrário à hipótese de que $f'(x) > 0$ se $a < x < b$.

De modo análogo, obtemos que se f não for estritamente decrescente em $[a, b]$, teríamos que $f'(t) \geq 0$, em algum t, com $a < t < b$, contradizendo a outra hipótese (que $f'(x) < 0$ no intervalo). □

2.1. **Pontos de Máximo e de Mínimo Locais e Globais.** Começamos as aplicações dos resultados teóricos acima em problemas de achar pontos de máximo e de mínimo de uma função.

Definição 2 (Pontos de Máximo e de Mínimo Locais)**.** Um ponto $x \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de máximo (respectivamente, mínimo) local se existir um intervalo aberto I em $\mathrm{Dom}(f)$ contendo x, tal que se $y \in I$ e $y \neq x$, então $f(y) < f(x)$ (respectivamente, $f(y) > f(x)$).

Observação 4. Para localizar esse pontos de máximo ou mínimo locais, primeiramente procuramos pelos pontos $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tais que $f'(x) = 0$. Depois estudamos a variação de sinais de f' em torno desses pontos.

Exemplo 6. A função $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ tem derivada $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$. Os pontos em que $f'(x) = 0$ são $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. Os sinais de f' são

(1) se $x < -1$, $f'(x) > 0$ (f é estritamente crescente neste intervalo);
(2) se $-1 < x < 0$, $f'(x) < 0$ (f é estritamente decrescente neste intervalo);
(3) se $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ (f é estritamente decrescente neste intervalo);
(4) se $x > 1$, $f'(x) > 0$ (f é estritamente crescente neste intervalo).

Com essa informação podemos concluir que $x = -1$ é ponto de máximo local, $x = 1$ é ponto de mínimo local e $x = 0$ não é ponto de máximo e nem de mínimo local.

Exemplo 7. Nem sempre os problemas vêm com a função descrita explicitamente. Por exemplo, determinar as medidas da base e da altura do retângulo de maior área, sujeito às seguintes restrições: os vértices da base estão no eixo x e os outros dois vértices estão na parábola $y = 4 - x^2$, com $y > 0$.

Para resolver o problema, precisamos primeiramente descobrir qual é a função a ser considerada. A indicação vem das palavras "máximo", "mínimo", "maior", "menor" e outras análogas. Neste exemplo a palavra que aparece é "maior". Pergunta: "maior" o quê? Aqui é a *área do retângulo*, que é a base vezes a altura. Como a base tem que estar no eixo x e os outros dois vértices devem estar naquela parábola, com $y > 0$, se $A = (x, 0)$ for um dos vértices da base, então para que o vértice $B = (x, y)$ seja do retângulo (acima do ponto A), temos que ter $y > 0$. Isso força que $-2 < x < 2$ e $y = 4 - x^2$. Os outros dois vértices serão $C = (-x, y)$ e $D = (-x, 0)$. Assim, a base medirá $2|x|$ e a altura $4 - x^2$. Para eliminar o módulo, basta considerar $0 < x < 2$.

Assim, a função a ser estudada será $f(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$, com a restrição $0 < x < 2$.

Sua derivada é $f'(x) = 8 - 6x^2$, cujas raízes são $\pm\sqrt{4/3}$ e a única sujeita à restrição $0 < x < 2$ é $x = +\sqrt{4/3}$.

O estudo de sinais de $f'(x) = 8 - 6x^2$ dá $f'(x) > 0$ ($f(x)$ cresce), se $0 < x < \sqrt{4/3}$, e $f'(x) < 0$, se $\sqrt{4/3} < x < 2$ ($f(x)$ decresce), ou seja, $x = \sqrt{4/3}$ é um ponto de máximo local. Daí, a base mede $2x = 2\sqrt{4/3}$ e a altura mede $4 - x^2 = 4 - 4/3 = 8/3$.

3. Reta Tangente

Lembre-se que a derivada de $f(x)$ em um ponto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

A equação de uma reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem coeficiente angular $a \in \mathbb{R}$ pode ser escrita como $y - y_0 = a(x - x_0)$, pois substituímos x por x_0 e y por y_0 na equação $y = ax + b$ e determinamos o coeficiente linear $b = y_0 - ax_0$. Daí, escrevemos a equação da reta como $y = ax + (y_0 - ax_0)$, que é equivalente à equação $y - y_0 = a(x - x_0)$.

Exemplo 8. A equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 2x + 3$ no ponto $(x_0, y_0) = (1, 6)$ é obtida derivando f, $f'(x) = 2x + 2$, e o coeficiente angular será $a = f'(1) = 4$. Assim, a equação da reta tangente em $(x_0, y_0) = (1, 6)$ será $y - 6 = 4(x - 1)$.

Exemplo 9. Nem sempre esse procedimento funciona, pois f pode não ser derivável em $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$, como é o caso de $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, com $x_0 = 0$, pois $f'(x) = x^{-2/3}/3 = 1/3x^{2/3}$, e $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t) - f(0)}{t} = \infty$, ou seja, não é derivável em $x_0 = 0$.

4. Esboço de Gráficos

Nesta seção a segunda derivada de uma função, ou seja, a derivada da derivada de uma função. Uma interpretação física da segunda derivada é a aceleração de um objeto, cuja posição seja dada pela função¿ Assim, temos $f(t) =$ a posição no instante t, $f'(t)$ sua velocidade nesse instante, e $f''(t)$ sua aceleração (a taxa de variação da velocidade).

4.1. **Concavidade de Gráficos de Funções e Pontos de Inflexão.**

Já vimos que os sinais de $f'(x)$ determinam os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x)$. Se derivarmos a função $f'(x)$ obtemos a *segunda derivada* de f, denotada $f''(x)$, ou $\dfrac{d^2f}{dx^2}$. O sinal da segunda derivada determina os intervalos de crescimento e decrescimento da primeira derivada, o que determina a *concavidade* do gráfico da função original.

Definição 3 (Concavidade)**.** Dados uma função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ e um intervalo I contido em $\mathrm{Dom}(f)$, dizemos que

(I) f tem concavidade para cima em I se para todos $a, b \in I$, com $a < b$, e todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(a) + [f(b) - f(a)](x - a)/(b - a)$, ou seja, o gráfico de f restrito ao intervalo $[a, b]$ fica abaixo da reta $y = f(a) + [f(b) - f(a)](x - a)/(b - a)$;

(II) f tem concavidade para baixo em I se para todos $a, b \in I$, com $a < b$, e todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq f(a) + [f(b) - f(a)](x - a)/(b - a)$, ou seja, o gráfico de f restrito ao intervalo $[a, b]$ fica acima da reta $y = f(a) + [f(b) - f(a)](x - a)/(b - a)$.

Definição 4 (Ponto de Inflexão)**.** Um ponto $x \in \mathrm{Dom}(f)$ é um ponto de inflexão se existirem $a, b \in \mathrm{Dom}(f)$, com $a < b$, $x \in]a, b[$, e $[a, b]$ contido em $\mathrm{Dom}(f)$, tais que a concavidades de f em $]a, x[$ e $]x, b[$ são opostas (uma para baixo e outra para cima).

Proposição 6 (Concavidade e o Sinal da Segunda Derivada)**.** Se $f''(x) > 0$ (respectivamente, $f(x) < 0$) no intervalo I, então f tem concavidade para cima (respectivamente, para baixo) no intervalo I.

Demonstração. Se $f''(x) > 0$ no intervalo I, então $f'(x)$ é estritamente crescente nesse intervalo. Sejam $a < b < c$, todos em I. Temos que mostrar que $f(b) < f(a) + [f(c) - f(a)](b-a)/(c-a)$. Para isso, suporemos que $f(b) \geq f(a) + [f(c) - f(a)](b-a)/(c-a)$ e concluiremos que $f'(x)$ não pode ser estritamente crescente em I. Pelo TVM, existem $d_1 \in]a, b[$ e $d_2 \in]b, c[$, tais que

$$f'(d_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ e } f'(d_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

Como assumimos que $f(b) \geq f(a) + [f(c) - f(a)](b-a)/(c-a)$, temos que

$$f'(d_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

A reta $y = f(a) + [f(c) - f(a)](x - a)/(c - a)$ contém os pontos $(c, f(c))$ e (b, y_b), onde $y_b = f(a) + [f(c) - f(a)](b - a)/(c - a) \leq f(b)$. Seu coeficiente angular é

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c) - y_b}{c - b} \geq \frac{f(c) - f(b)}{c - b},$$

e, assim,

$$f'(d_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq f'(d_1),$$

ou seja, $f'(x)$ não pode ser estritamente crescente em I.

O mesmo tipo de argumento, com as devidas modificações, aplica-se ao caso em que $f''(x) < 0$ em I. □

Exemplo 10. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Seu gráfico é uma parábola. Se $a > 0$, sua concavidade é para cima em $\mathbb{R}$ (sua segunda derivada $f''(x) = 2a > 0$). Se $a < 0$, sua concavidade é para baixo em $\mathbb{R}$ (sua segunda derivada $f''(x) = 2a < 0$). Essas funções não têm pontos de inflexão.

Exemplo 11. Se $f(x) = x^3$, então $f''(x) = 6x$. Se $x < 0$, $f''(x) < 0$ e sua concavidade é para baixo. Se $x > 0$, $f''(x) > 0$ e sua concavidade é para cima. Com isso, o ponto $x = 0$ é um ponto de inflexão.

4.2. **Assíntotas.**

Definição 5. Dada uma função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, uma assíntota de f é uma reta, tal que o gráfico de f tende a encostar na reta. Podem ser

(a) assíntota vertical: uma reta vertical da forma $x = a$, tal que pelo menos um dos limites laterais $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ seja ∞ ou $-\infty$;
(b) assíntota horizontal: uma reta da forma $y = b$, tal que ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$;
(c) assíntota inclinada: uma reta da forma $y = ax + b$, com $a \neq 0$, tal que ou $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$, ou $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$.

Exemplo 12. A função $f(x) = x^{-1}$ $(x \neq 0)$ tem uma assíntoda horizontal, a reta $y = 0$ (o eixo x), e uma vertical, a reta $x = 0$ (o eixo y).

Observação 5. Assíntotas horizontais e verticais são mais fáceis de localizar (quando existem) do que as inclinadas. Em certos casos, aparecem como assíntotas de funções do tipo $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, com $a > 0$, porque se $x \neq 0$, $f(x) = |x|\sqrt{a + bx^{-1} + cx^{-2}}$ e, como $\sqrt{a + bx^{-1} + cx^{-2}} \to \sqrt{a}$, se $x \to \pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a}] = b/2\sqrt{a}$, ou seja, a reta $y = \sqrt{a}\,x - b/2\sqrt{a}$ é uma assíntota inclinada de f (para $x \to \infty$). Analogamente, pode-se verificar que a reta $y = -\sqrt{a}\,x - b/2\sqrt{a}$ também é assíntota de f (para $x \to -\infty$).

Exemplo 13. A função $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbb{R})$ tem duas assíntotas inclinadas, as retas $y = x$ e $y = -x$, pois

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2 + 1} - x] = 0, \text{ e } \lim_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2 + 1} - (-x)] = 0.$$

Observação 6. Outro tipo de função que tem assíntotas inclinadas são as funções racionais $f(x) = p(x)/q(x)$, onde p ee q são polinômios, tais que o grau de p é o grau de q $+1$. Para descobrir a equação da reta assíntota, basta dividir p por q, $p(x) = u(x)q(x) + r(x)$, com o grau do resto, $r(x)$, menor que o grau de q. A reta procurada terá equação $y = u(x)$ (o polinômio $u(x)$ tem grau 1), pois

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{p(x)}{q(x)} - u(x)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{u(x)q(x) + r(x)}{q(x)} - u(x)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{r(x)}{q(x)} = 0.$$

Observe que a mesma reta é assíntota para $x \to +\infty$ e para $x \to -\infty$.

Exemplo 14. Determinar a assíntota de $f(x) = \dfrac{2x^3 + x + 5}{x^2 - x + 1}$. Observe que $2x^3 + x + 5 = (2x + 2)(x^2 - x + 1) + (x + 3)$ e, daí,

$$f(x) = \frac{2x^3 + x + 5}{x^2 - x + 1} = (2x + 2) + \frac{x + 3}{x^2 - x + 1}.$$

A reta procurada tem equação $y = 2x + 2$.

4.3. **O Esboço de Gráficos.** Agora juntamos todas as informações acima para fazermos um esboço do gráfico de uma função. Isso significa a determinação de intervalos de crescimanto e decrescimento, de concavidade para cima e para baixo; pontos de máximo e mínimo locais, e pontos de inflexão; assíntotas, quando existirem.

Exemplo 15. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, e $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3}$ (preste atenção nas simplificações).

- Intervalos de crescimento e decrescimento: $f'(x) < 0$ se $x < -1$ e $x > 1$ (f estritamente decrescente); $f'(x) > 0$ se $-1 < x < 1$ (f estritamente crescente).
- Pontos de máximo local ($x = 1$) e de mínimo local ($x = -1$).
- Intervalos de concavidade: $f''(x) < 0$ se $x < -\sqrt{3}$ (concavidade para baixo); $f''(x) > 0$ se $-\sqrt{3} < x < 0$ (concavidade para cima); $f''(x) < 0$ se $0 < x < \sqrt{3}$ (concavidade para baixo); $f''(x) > 0$ se $x > \sqrt{3}$ (concavidade para cima).
- Pontos de inflexão: $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = \sqrt{3}$.
- Assíntota: como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, a reta $y = 0$ (o eixo x) é a assíntota horizontal de f, tanto para $x \to +\infty$, quanto para $x \to -\infty$.

Exemplo 16. Seja $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$. Suas derivadas são $f'(x) = -\dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$, e $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$.

- Como $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, f é estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ e $]1, \infty[$.

- A derivada $f'(x)$ nunca se anula e, portanto, não tem pontos de máximo e nem de mínimo locais.
- Intervalos de concavidade: $f''(x) < 0$ se $x < -1$ (concavidade para baixo); $f''(x) > 0$ se $-1 < x < 0$ (concavidade para cima); $f''(x) < 0$ se $0 < x < 1$ (concavidade para baixo); $f''(x) > 0$ se $x > 1$ (concavidade para cima).
- Ponto de inflexão: $x = 0$. Cuidado: como os pontos $x = -1$ e $x = 1$ não estão em $\mathrm{Dom}(f)$, eles não podem ser chamados de pontos de inflexão, apesar da mudança de concavidade.
- Assíntotas: horizontal $y = 0$ (eixo x), para $x \to -\infty$ e para $x \to +\infty$; verticais $x = -1$ e $x = +1$ (para todos os limites laterais).

Exemplo 17. Seja $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, e $f''(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 2x + 2)^{3/2}}$.

- Se $x < -1$, $f'(x) < 0$ (f decrescente), e se $x > -1$, $f'(x) > 0$ (f crescente).
- O ponto $x = -1$ é ponto de mínimo local.
- Como $f''(x) > 0$ se $x \in \mathbb{R}$, a concavidade é sempre para cima. Não há, portanto, nenhum ponto de inflexão.
- Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, não há assíntotas verticais. Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$, não há assíntotas horizontais. Como $\lim_{x\to\infty} f(x)/x = 1 \neq 0$, existe uma assíntota inclinada para $x \to \infty$, de equação $y = x + 1$, pois $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - x = 1$. Como $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = -1 \neq 0$, existe uma assíntota inclinada para $x \to -\infty$, de equação $y = -x - 1$, pois $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + x = -1$.

Exemplo 18. Seja $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, $x < -2$, ou $x > 2$ (mantenha a restrição do $\mathrm{Dom}(f)$ até o fim). Suas derivadas são $f'(x) = \dfrac{-4}{(x^2 - 4)^{3/2}}$, e $f''(x) = \dfrac{12x}{(x^2 - 4)^{5/2}}$.

- Como $f'(x) < 0$ se $x \in \mathrm{Dom}(f)$, então f é decrescente em cada um dos intervalos $x < -2$ e $x > 2$ (não ́e correto dizer que f é decrescente em todo seu domínio, pois $f(x) > 0$ se $x > 2$ e $f(x) < 0$, se $x < -2$; ela é decrescente em *cada intervalo de seu domínio*).

- Não existem pontos de máximo ou mínimo locais.
- Temos que $f''(x) < 0$ se $x < -2$ (concavidade para baixo), e $f''(x) > 0$, se $x > 2$ (concavidade para cima). Não há pontos de inflexão.
- Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$, as retas verticais $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais de f. Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas horizontais de f e, por isso, não há assíntotas inclinadas.

Exemplo 19. Seja $f(x) = x^2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = (x^2+2x)e^x$, e $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$.

- Temos que $f'(x) > 0$ se $x > 0$ (f crescente) e se $x < -2$ (f crescente), e $f'(x) < 0$ se $-2 < x < 0$ (decrescente).
- Ponto de máximo local: $x = -2$. Ponto de mínimo local: $x = 0$.
- Temos que $f''(x) > 0$ se $x < -2 - \sqrt{2}$ (concavidade para cima) e $x > -2 + \sqrt{2}$ (concavidade para cima); $f''(x) < 0$ se $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$ (concavidade para baixo). Pontos de inflexão: $x = -2 - \sqrt{2}$ e $x = -2 + \sqrt{2}$.
- Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, não há assíntotas verticais para f. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, não há assíntota horizontal para f se $x \to \infty$. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2/e^{-x} = 0$ (truque para usar L'Hospital), a reta $y = 0$ é assíntota horizontal para f, com $x \to -\infty$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \infty$, não há assíntotas inclinadas para f, se $x \to +\infty$, e também para $x \to -\infty$, pois ali tem assíntota horizontal.

Exemplo 20. Seja $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$, e $f''(x) = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$.

- Temos que $f'(x) > 0$, se $x < 0$ (f crescente), e $f'(x) < 0$ se $x > 0$ (f decrescente).
- O ponto $x = 0$ é de máximo local.

- Temos que $f''(x) > 0$ se $x < -\sqrt{2}/2$ (concavidade para cima), e se $x > \sqrt{2}/2$ (concavidade para cima); $f''(x) < 0$ se $-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$ (concavidade para baixo). Pontos de inflexão: $x = -\sqrt{2}/2$ e $x = \sqrt{2}/2$.
- Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, não há assíntotas verticais de f. Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal de f, para $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$.

Exemplo 21. Seja $f(x) = \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$.

- Intervalos de crescimento e decrescimento: se $x < 0$, f é decrescente, e se $x > 0$, f é crescente.
- Ponto de mínimo local: $x = 0$.
- Intervalos de concavidade: se $-1 < x < 1$, concavidade para cima; se $x < -1$, ou $x > 1$, concavidade para baixo.
- Pontos de inflexão: $x = -1$ e $x = 1$.
- Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, f não possui assíntotas horizontais. Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, f não possui assíntotas verticais. Como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 0$, f não possui assíntotas inclinadas.

Exemplo 22. Seja $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Suas derivadas são ão $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ e $f''(x) = \dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$. Lembre-se que $lnx = \log_e x$; $\ln e^x = x$ e $e^{a\ln x} = x^a$, $a\ln x = \ln x^a$.

- Intervalos de crescimento e decrescimento: se $0 < x < e$, $f'(x) > 0$ (f crecente); se $x > e$, $f'(x) < 0$ (f decrescente).
- Ponto de máximo local: $x = e$
- Intervalos de concavidade: $f''(x) < 0$ se $0 < x < e^{\sqrt{3}}$ (concavidade para baixo); $f''(x) > 0$ se $x > e^{\sqrt{3}}$ (concavidade para cima).
- Ponto de inflexão: $x = e^{\sqrt{3}}$.
- Assíntotas: vertical $x = 0$ (eixo y); horizontal $y = 0$ (eixo x), para $x \to +\infty$.

Exemplo 23. Seja $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

e $f''(x) = -\dfrac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

- Como $f'(x) > 0$ sempre, f é estritamente crescente em todo $\mathbb{R}$.
- Como f é estritamente crescente, não possui pontos de máximo ou mínimo locais.
- Intervalos de concavidade: $f''(x) > 0$ se $x < 0$ (concavidade para cima); $f''(x) < 0$ se $x > 0$ (concavidade para baixo).
- Ponto de inflexão: $x = 0$.
- Não possui assíntotas, pois $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Use $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{-x + \sqrt{x^2+1}}\right)$ para calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Exemplo 24. Seja $f(x) = e^x - e^{-x}$, com $x \in \mathbb{R}$. Suas derivadas são $f'(x) = e^x + e^{-x}$ e $f''(x) = e^x - e^{-x}$.

- Temos que $f'(x) < 0$ se $x < 0$ (f decrescente), e $f'(x) > 0$ se $x > 0$ (f crescente).
- Ponto de mínimo local: $x = 0$.
- Temos que $f''(x) > 0$, se $x \in \mathbb{R}$ (concavidade para cima), sem pontos de inflexão.
- Como $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \infty$, f não possui assíntotas de nenhum tipo.