LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e do D. Figueiredo. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Folland e (D. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Djairo. Nos exercícios abaixo denotaremos a transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f)$ ou por $\hat{f}$.

Exercício 1. (D. 6, ex.2.2) Calcule as transformadas de Fourier das funções abaixo:

i) $u_a(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x| \leq a \\ 0, \text{ se } |x| > a \end{cases}$, para uma constante $a > 0$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, \text{ se } |x| \leq a \\ 0, \text{ se } |x| > a \end{cases}$.

iii) $f(x) = e^{-a|x|}$.

iv) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } |x| \leq a \end{cases}$, para uma constante $a > 0$.

v) $f(x) = e^{-ax^2}$, para uma constante $a > 0$.

Exercício 2. (D. 6, ex.2.3) Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{f} = f$, ou seja, tal que f seja igual a sua transformada de Fourier. (Lembre-se dos exemplos dados em sala de aula)

Exercício 3. (D. 6, ex.2.4) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função par, ou seja, $f(x) = f(-x)$, então a sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função que assume apenas valores reais, ou seja, $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. (D. 6, ex.2.5) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$, então a sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função que assume apenas valores imaginários puros, ou seja, $\hat{f}(\xi)$ é um imaginário puro para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercício 5. (D. 6, ex.2.6) Seja $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ uma função em $L^1(\mathbb{R})$. Defina

i) A transformada cosseno de Fourier

$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \int_0^\infty cos(x\xi) f(x)\, dx.$$

ii) A transformada seno de Fourier

$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \int_0^\infty sen(x\xi) f(x)\, dx.$$

Mostre que se estendermos f como um função par, temos

$$\mathcal{F}_c(f) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f).$$

Mostre que se estendermos f como uma função ímpar, temos

$$\mathcal{F}_s(f) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}(f).$$

Exercício 6. (D. 6, ex.2.7) Seja $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier. Mostre que:

i) $\mathcal{F}(f(-x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$.

ii) $\mathcal{F}\left(\overline{f(x)}\right)(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$.

iii) $\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(\xi) = a\mathcal{F}(f)(a\xi)$, $a > 0$.

iv) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b \in \mathbb{R}$.

v) $\mathcal{F}\left(f(x)e^{-icx}\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercício 7. (D. 6, ex.2.8) Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:

i) $e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$

ii) $e^{-(2x+1)^2}$

iii) f tal que $f(2) = 1$, $f(x) = 0$, se $|x-2| \geq 1$ e f é uma função seccionalmente linear (o gráfico de f será um triângulo com centro em 2)

Exercício 8. (D. 6, ex.2.9) Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:
i) $e^{-a|x|}cos(cx)$.
ii) $e^{-ax^2}sen(cx)$.

Exercício 9. (D. 3.3, ex.2.10) Mostre que
i) $\mathcal{F}(f(x)\,cos(cx)) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\xi - c) + \hat{f}(\xi + c)\right]$.
ii) $\mathcal{F}(f(x)\,sen(cx)) = \frac{1}{2i}\left[\hat{f}(\xi - c) - \hat{f}(\xi + c)\right]$.

Exercício 10. (D. 3.5, ex.3.1) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função linear tal que f e f' pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ e tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Mostre que $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$. (Dica: Integre por partes)

Exercício 11. (D. 3.5, ex.3.4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função de classe $L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$. Mostre que

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)(\xi) = \frac{1}{i\xi}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Exercício 12. (D. 3.5, ex.3.7) Mostre que se $f \in L^1(\mathbb{R})$ for comtínua, então
i) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = 2\pi f(-x)$.
ii) $\mathcal{F}^4(f)(x) = (2\pi)^2 f(x)$.

Exercício 13. (D. 3.5, ex.3.16) Ache um exemplo de função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que seja $L^1(\mathbb{R})$ de classe C^∞, ou seja, infinitamente diferenciável, mas que $\mathcal{F}(f)$ não seja diferenciável em todos os pontos. (Dica: Pense nos exemplos dados em sala de aula)

Exercício 14. (F. 7.1, ex.4) Seja $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = e^{-2x^2}$. Calcule $f * g$. (Dica: Complete quadrados e use que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$).

Exercício 15. (F. 7.1, ex.5) Seja $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Mostre que $f_t * f_s = f_{t+s}$.

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}.$$

i) Calcule $f * f$ e $f * f * f$.
ii) Seja $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ e $g(x) = x^3 - x$. Calcule $f_\epsilon * g$ e mostre que $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon * g = 2g$ diretamente.

Exercício 17. (F. 7.4, ex.1) Calcule as seguintes transformadas de Fourier seno e cosseno:
i) $\mathcal{F}_s\left(e^{-kx}\right)$
ii) $\mathcal{F}_c\left(e^{-kx}\right)$
iii) $\mathcal{F}_c\left((1+x)\,e^{-kx}\right)$
iv) $\mathcal{F}_s\left(xe^{-kx}\right)$

Exercício 18. (F. 7.4, ex.1) Resolva a equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \ x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

para

$$f(x) = \begin{cases} T, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}.$$

Exercício 19. (D. 4.3, ex.5) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + g(t,x), \ x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

Exercício 20. (D. 4.3, ex.6) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + bu(t,x), \ x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

Exercício 21. (D. 4.3, ex.7) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,(t,x) + h\,(t,x)\,,\ x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. ,$$