LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e das notas de João Barata[1]. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Folland e (B. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X das notas de J. Barata.

1. Exercícios para achar a função de Green para problemas de valor inicial

Exercício 1. Este exercício pode ser útil para determinar as soluções dos problemas abaixo:

Seja dada a equação $\frac{d^m u}{dx^m}(x) + a_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}(x) + ... + a_0 u(x) = 0$.

a) Mostre que $e^{\lambda x}$ é solução da equação acima se λ é raiz de $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0 = 0$.

b) Mostre que, para a equação $\frac{d^2u}{dx^2}(x) + a_1\frac{du}{dx}(x) + a_0 u(x) = 0$, se $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ tem apenas uma raiz λ_0, isto é, $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_0)^2$, então $e^{\lambda_0 t}$ e $te^{\lambda_0 t}$ são soluções do problema.

Resolução:

a) Basta observar que $\frac{d^j}{dx^j}\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda^j e^{\lambda x}$. Desta maneira, se $u(x) = e^{\lambda x}$, temos

$$\frac{d^m u}{dx^m}(x) + a_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}}(x) + ... + a_0 u(x) = \left(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0\right)e^{\lambda x}.$$

Logo se λ é raiz de $\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + ... + a_0 = 0$, então $e^{\lambda x}$ é solução da equação.

b) Neste caso, temos $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_0)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2$. Logo $a_1 = -2\lambda_0$ e $a_0 = \lambda_0^2$. Logo

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}(x) - 2\lambda_0\frac{d}{dx}(x) + \lambda_0^2\right)e^{\lambda_0 x} = \left(\lambda_0^2 - 2\lambda_0^2 + \lambda_0^2\right)e^{\lambda_0 x} = 0.$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}(x) - 2\lambda_0\frac{d}{dx}(x) + \lambda_0^2\right)xe^{\lambda_0 x} = \left(\lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0 e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x} - 2\lambda_0 e^{\lambda_0 x} - 2\lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 x e^{\lambda_0 x}\right) = 0.$$

Exercício 2. (F. 10.1, ex.2.1) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + 4u' + 4u = f \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}.$$

Resposta: $G(x,y) = (x-y)\,e^{-2(x-y)}\left(H(x-y) - H(-y)\right)$

Para achar a função de Green, vamos resolver

$$\begin{cases} v_0'' + 4v_0' + 4v_0 = 0 \\ v_0(0) = 0 \\ v_0'(0) = 1 \end{cases}.$$

Vamos procurar soluções da forma $v_0(x) = e^{\lambda x}$. Substituindo na equação, obtemos

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0 \iff \left(\lambda^2 + 4\lambda + 4\right)x^{\lambda} = 0.$$

Logo devemos ter $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, ou seja, $(\lambda + 2)^2 = 0$. Logo e^{-2t} é solução. Pelo exercício 1) vemos que te^{-2t} é outra solução. Logo $v_0(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$. Como $v_0(0) = 0$, concluímos que $A = 0$. Logo $v_0(t) = Bte^{-2t}$. Como $v_0'(0) = 1$, concluímos que $B = 1$ e $v_0(t) = te^{-2t}$. Assim, $v_y(t) = v_0(t-y) = (t-y)\,e^{-2(t-y)}$. Logo a função de Green é igual a $G(t,s) = (t-s)\,e^{-2(t-s)}\left(H(t-s) - H(-s)\right)$.

Exercício 3. (F. 10.1, ex.2.2) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + 9u' + 20u = f \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases}.$$

[1] http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/arquivos/nc-cap18.pdf

Resposta: $G(x,y) = \left(e^{-4(x-y)} - e^{-5(x-y)}\right)(H(x-y) - H(-y))$

Para achar a função de Green, vamos resolver

$$\begin{cases} v_0'' + 9v_0' + 20v_0 = 0 \\ v_0(0) = 0 \\ v_0'(0) = 1 \end{cases}.$$

Vamos procurar soluções da forma $v_0(x) = e^{\lambda x}$. Substituindo na equação, obtemos

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + 9\lambda e^{\lambda x} + 20 e^{\lambda x} = 0 \iff \left(\lambda^2 + 9\lambda + 20\right) x^{\lambda} = 0.$$

Logo devemos ter $\lambda^2 + 9\lambda + 20 = 0$, ou seja, $(\lambda+4)(\lambda+5) = 0$. Logo e^{-4t} e e^{-5t} são soluções. Logo $v_0(t) = Ae^{-4t} + Be^{-5t}$. Para satisfazer as condições $v_0(0) = 0$ e $v_0'(0) = 1$, devemos ter $A = 1$ e $B = -1$. Logo $v_0(t) = e^{-4t} - e^{-5t}$. Assim, $v_y(t) = v_0(t-y) = e^{-4(t-y)} - e^{-5(t-y)}$. Logo a função de Green é igual a $G(x,y) = \left(e^{-4(x-y)} - e^{-5(x-y)}\right)(H(x-y) - H(-y))$.

Exercício 4. (F. 10.1, ex.2.3) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u^{(4)} + u = f \\ u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0 \end{cases}.$$

Resposta: $G(x,y) = v(x-y)(H(x-y) - H(-y))$, em que

$$v(x) = a^3\left[e^{ax}(cos(ax) - sen(ax)) + e^{-ax}(cos(ax) + sen(ax))\right],$$

e $a = 2^{-\frac{1}{2}}$.

Exercício 5. (F. 10.1, ex.2.4) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} x^2 u'' + 4xu' + 2u = f \\ u(1) = u'(1) = 0 \end{cases},$$

para $x > 0$.

Resposta: $G(x,y) = \left(x^{-1} - yx^{-2}\right)(H(x-y) - H(1-y))$.

Para achar a função de Green, vamos resolver

$$\begin{cases} x^2 v_y'' + 4xv_y' + 2v_y = 0 \\ v_y(y) = 0 \\ v_y'(y) = \frac{1}{y^2} \end{cases}.$$

Vamos procurar soluções da forma $v_y(x) = x^{\lambda}$. Substituindo na equação, obtemos

$$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 4x\lambda x^{\lambda-1} + 2x^{\lambda} = 0 \iff (\lambda(\lambda-1) + 4\lambda + 2)x^{\lambda} = 0.$$

Logo devemos ter $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, ou seja, $\lambda = -1$ ou $\lambda = -2$. Assim, $v_y(x) = ax^{-1} + bx^{-2}$. Usando as condições iniciais, vemos que

$$\begin{cases} ay^{-1} + by^{-2} = 0 \\ -ay^{-2} - 2by^{-3} = \frac{1}{y^2} \end{cases}.$$

Logo $a = 1$ e $b = -y$. Portanto $v_y(x) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}$. A solução do problema será, então

$$u(x) = \int_1^x v_y(x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} v_y(x)(H(x-y) - H(1-y))\,dy.$$

Logo a função de Green é igual a $\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2}\right)(H(x-y) - H(1-y))$.

2. Exercícios para achar a função de Green para problemas de Contorno

Exercício 6. (B. 18, ex.18.1, 18.2, 18.3) Verifique que o problema:

a) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$ com $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 1$ não tem solução.

b) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$ com $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 0$ tem infinita soluções.

c) $\frac{d^2u}{dx^2}(x) + u(x) = 0$ com $u(0) = a$ e $u(\pi) = b$ tem infinitas soluções se $a = -b$ e não tem solução se $a \neq -b$.

Resolução:

a) Vemos que se $\frac{d^2u}{dx^2}(x) = 0$, então $u(x) = ax + b$. Como $u'(0) = 0$ e $u'(1) = 1$, concluímos que $a = 0$ e $a = 1$. Absurdo.

b) Toda função constante é solução do problema.

c) Se $\frac{d^2u}{dx^2}(x)+u(x)=0$, então $u(x)=Acos(x+\phi)$. Logo $u(0)=Acos(\phi)=a$ e $u(x)=Acos(\pi+\phi)=-Acos(\phi)=b$. Logo para se $a\neq -b$, temos uma contradição e não existem soluções. Se $a=-b$, então $\frac{a}{cos(\phi)}cos(x+\phi)$ é solução para qualquer que seja ϕ.

Exercício 7. (B. 18, ex.18.22) Determine explicitamente a função de Green para os seguintes problemas:

a) $\frac{d^2u}{dx^2}(x)=f(x)$, com $u(0)=0$ e $u(1)=1$.
b) $\frac{d^2u}{dx^2}(x)=f(x)$, com $u(0)=0$ e $u'(1)=0$.
c) $\frac{d^2u}{dx^2}(x)=f(x)$, com $u(0)=0$ e $u(1)+u'(1)=0$.
d) $\frac{d^2u}{dx^2}(x)+u(x)=f(x)$, com $u(0)=0$ e $u'(1)=0$.
e) $\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right)=f(x)$, com $u(1)=0$ e $u(e)=0$.

Resposta:
a) **Note que a condição de contorno correta é $u(1)=0$.**
Vemos que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u(0)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_0(x)=x$ e que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u(1)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_1(x)=x-1$. Logo $W(x)=v_0(x)v_1'(x)-v_0'(x)v_1(x)=x-(x-1)=1$. Logo

$$G(x,y)=\begin{cases} x(y-1), & x<y\\ y(x-1), & x>y\end{cases}.$$

b) Vemos que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u(0)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_0(x)=x$ e que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u'(1)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_1(x)=1$. Logo $W(x)=v_0(x)v_1'(x)-v_0'(x)v_1(x)=1$. Logo

$$G(x,y)=\begin{cases} x, & x<y\\ y, & x>y\end{cases}.$$

c) Vemos que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u(0)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_0(x)=x$ e que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u(1)+u'(1)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_1(x)=-\frac{1}{2}x+1$. Logo $W(x)=v_0(x)v_1'(x)-v_0'(x)v_1(x)=-\frac{1}{2}x-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=-1$. Logo

$$G(x,y)=\begin{cases} x\left(\frac{1}{2}y-1\right), & x<y\\ y\left(\frac{1}{2}x-1\right), & x>y\end{cases}.$$

d) Vemos que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)+u(x)=0\\ u(0)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_0(x)=sen(x)$ e que

$$\begin{gathered}\frac{d^2u}{dx^2}(x)=0\\ u'(1)=0\end{gathered}$$

tem solução $v_1(x)=cos(x-1)$. Logo $W(x)=sen(x)\,sen(x-1)+cos(x)\,cos(x-1)=cos(x-1-x)=cos(1)$. Logo

$$G(x,y)=\begin{cases} \frac{sen(x)cos(y-1)}{cos(1)}, & x<y\\ \frac{sen(y)cos(x-1)}{cos(1)}, & x>y\end{cases}.$$

e) Se $\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right)=0$, então $x\frac{du}{dx}(x)=C$ e $u(x)=Cln(x)+D$. Vemos que

$$\begin{array}{c}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right)=0\\ u(1)=0\end{array}$$

tem solução $v_0(x)=ln(x)$ e que

$$\begin{array}{c}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right)=0\\ u(e)=0\end{array}$$

tem solução $v_1(x)=ln(x)-1$. Logo $W(x)=ln(x)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}(ln(x)-1)=\frac{1}{x}$. Como $p_2(x)=x$, já que $\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}(x)\right)=x\frac{d^2u}{dx^2}(x)+\frac{du}{dx}(x)$ concluímos que

$$G(x,y)=\left\{\begin{array}{l} ln(x)(ln(y)-1)\,,\ x<y\\ ln(y)(ln(x)-1)\,,\ x>y\end{array}\right. .$$

Exercício 8. (B. 18, ex.18.23) Determine explicitamente a solução dos cinco problemas acima no caso em que $f(x)=x$.

Exercício 9. (B. 18, ex.18.20) Determine a função de Green para o seguinte problema de Sturm: $u''(x)=f(x)$, com $\alpha_1u(a)+\alpha_2u'(a)=0$, $\beta_1u(b)+\beta_2u'(b)=0$, com $x\in[a,b]$, $a<b$. (Suponha que α_1, α_2, β_1 e β_2 são valores que permitam a construção de funções de Green)

Exercício 10. (F. 10.1, ex.2.5) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2u''-2xu'+2u=f\\ u(1)=u(2)=0\end{array}\right. .$$

Resposta: $G(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\frac{\left(x-x^2\right)(2-y)}{y^3},\ \text{para}\,x<y\\ \frac{\left(2x-x^2\right)(1-y)}{y^3},\ \text{para}\,x>y\end{array}\right.$

Procurando soluções da forma $u(x)=x^\lambda$, obtemos $\lambda(\lambda-1)-2\lambda+2\lambda=\lambda^2-3\lambda+2\lambda=(\lambda-1)(\lambda-2)$. Logo $u(x)=ax+bx^2$. Logo

$$\left\{\begin{array}{c} x^2u''-2xu'+2u=0\\ u(1)=0\end{array}\right.$$

tem solução $v_1(x)=x^2-x$. Vemos também que

$$\left\{\begin{array}{c} x^2u''-2xu'+2u=0\\ u(2)=0\end{array}\right.$$

tem solução $v_2(x)=x^2-2x$. Logo

$$W(x)=\left(x^2-x\right)(2x-2)-(2x-1)\left(x^2-2x\right)=$$

$$2x^3-2x^2-2x^2+2x-2x^3+4x^2+x^2-2x=x^2.$$

Logo

$$G(x,y)=\left\{\begin{array}{l}\frac{\left(x^2-x\right)\left(y^2-2y\right)}{y^4},\ \text{para}\,x<y\\ \frac{\left(x^2-2x\right)\left(y^2-y\right)}{y^4},\ \text{para}\,x>y\end{array}\right. .$$

Exercício 11. (F. 10.1, ex.2.6) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} u''+\mu^2u=f\\ u(0)=u'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}\right. ,$$

em que $\mu\neq1,3,5,...$

Resposta: $G(x,y)=-sen(\mu x_-)\,cos\mu\left(x_+-\frac{1}{2}\pi\right)/\mu cos\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)$.

A solução geral da equação $u''+\mu^2u=0$ é $u(x)=Acos(\mu x)+Bsen(\mu x)$. Logo

$$\left\{\begin{array}{c} u''+\mu^2u=0\\ u(0)=0\end{array}\right.$$

tem solução particular $v_0(x)=sen(\mu x)$. A equação

$$\left\{\begin{array}{c} u''+\mu^2u=0\\ u'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{array}\right.$$

tem solução particular $v_{\frac{\pi}{2}}(x) = cos\left(\mu\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)$. Logo

$$W(x) = -\mu sen(\mu x)\, sen\left(\mu\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) - \mu cos(\mu x)\, cos\left(\mu\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right) = -\mu cos\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right).$$

Logo

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{sen(\mu x) cos\left(\mu\left(y - \frac{1}{2}\pi\right)\right)}{\mu cos\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)}, & \text{para } x < y \\ -\frac{sen(\mu y) cos\left(\mu\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)\right)}{\mu cos\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right)}, & \text{para } x > y \end{cases}.$$

Exercício 12. (F. 10.1, ex.2.7) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u(0) = 0 \text{ e } u'(1) = -u'(1) \end{cases},$$

em que $\tan(\mu) + \mu \neq 0$.

Resposta: $G(x,y) = sen(\mu x_-)\left[sen\mu(x_+ - 1) - \mu cos(x_+ - 1)\right] / \left(\mu sen\mu + \mu^2 cos\mu\right)$.

3. Exercícios para achar a função de Green para problemas de Contorno com condições no Infinito.

Exercício 13. (F. 10.1, ex.2.9) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u(0) = u(\infty) = 0 \end{cases},$$

em que $Im(\mu) > 0$.

Resposta: $G(x,y) = -\frac{1}{\mu} sen(\mu x_-) e^{i\mu x_+}$.

Vemos que $u'' + \mu^2 u = 0$ tem solução geral $u(x) = Acos(\mu x) + Bsen(\mu x) = Ce^{i\mu x} + De^{-i\mu x}$. Assim,

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

tem solução particular $v_0(x) = sen(\mu x)$. Por outro lado

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0 \\ u(\infty) = 0 \end{cases}$$

tem solução particular $v_1(x) = e^{i\mu x}$. Vemos que $W(x) = i\mu sen(\mu x)\, e^{i\mu x} - \mu cos(\mu x)\, e^{i\mu x} = \mu e^{i\mu x} \frac{1}{2}\left(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}\right) - \mu e^{i\mu x} \frac{1}{2}\left(e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}\right) = -\mu$. Logo

$$G(x,y) = \begin{cases} -\frac{sen(\mu x) e^{i\mu y}}{\mu}, & \text{para } x < y \\ -\frac{sen(\mu y) e^{i\mu x}}{\mu}, & \text{para } x > y \end{cases}.$$

Exercício 14. (F. 10.1, ex.2.10) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = f \\ u'(0) = u(\infty) = 0 \end{cases},$$

em que $Im(\mu) > 0$.

Resposta: $G(x,y) = \frac{1}{i\mu} cos(\mu x_-) e^{i\mu x_+}$.

A equação

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

tem solução particular $v_0(x) = cos(\mu x)$. Por outro lado

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0 \\ u(\infty) = 0 \end{cases}$$

tem solução particular $v_1(x) = e^{i\mu x}$. Vemos que

$$W(x) = i\mu cos(\mu x)\, e^{i\mu x} + \mu sen(\mu x)\, e^{i\mu x} =$$

$$-\frac{\mu}{2i} e^{i\mu x}\left(e^{i\mu x} + e^{-i\mu x}\right) + \mu e^{i\mu x} \frac{1}{2i}\left(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}\right) = i\mu.$$

Logo

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{sen(\mu x)e^{i\mu y}}{i\mu}, & \text{para}\, x<y\\ \frac{sen(\mu y)e^{i\mu x}}{i\mu}, & \text{para}\, x>y\end{cases}.$$

Exercício 15. (F. 10.1, ex.2.11) Ache a função de Green do problema abaixo:

$$\begin{cases}u''+u'-2u=f\\ u(\pm\infty)=0\end{cases}.$$

Resposta: $G(x,y)=\begin{cases}-\frac{1}{3}e^{x-y}, & x<y\\ -\frac{1}{3}e^{-2(x-y)}, & x>y\end{cases}$

Vemos que se $u(x)=e^{\lambda x}$ e $u''+u'-2u=0$, então $\lambda^2+\lambda-2=0$, ou seja, $(\lambda-1)(\lambda+2)=0$. Logo a solução geral é $u(x)=Ae^{x}+Be^{-2x}$. Assim,

$$\begin{cases}u''+u'-2u=0\\ u(-\infty)=0\end{cases}$$

tem solução particular $v_-(x)=e^{x}$ e

$$\begin{cases}u''+u'-2u=0\\ u(\infty)=0\end{cases}$$

tem solução particular $v_+(x)=e^{-2x}$. Desta maneira, $W(x)=-2e^{x}e^{-2x}-e^{x}e^{-2x}=-3e^{-x}$. Logo

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{x}e^{-2y}}{-3e^{-y}}, & \text{para}\, x<y\\ \frac{e^{y}e^{-2x}}{-3e^{-y}}, & \text{para}\, x>y\end{cases}.$$

Exercício 16. (F. 10.1, ex.4) Verifique que

$$u(x)=v_a(x)\int_x^b\frac{v_b(x)f(y)}{p_2(y)W(y)}dy+v_b(x)\int_a^x\frac{v_a(y)f(y)}{p_2(y)W(y)}dy$$

de fato resolve

$$\begin{array}{c}Lu(x):=p_2(x)u''(x)+p_1(x)u'(x)+p_0(x)u(x)=f(x)\\ \alpha u(a)+\alpha'u'(a)=0\,\text{e}\,\beta u(b)+\beta'u'(b)=0\end{array},$$

em que $|\alpha|+|\alpha'|\neq 0$ e $|\beta|+|\beta'|\neq 0$.

As funções v_a e v_b são tais que

$$\begin{array}{c}L(v_a)=0,\ \alpha v_a(a)+\alpha'v_a'(a)=0\\ L(v_b)=0,\ \beta v_b(b)+\beta'v_b'(b)=0\end{array}.$$

Resposta: Feito em sala de aula.

4. Exercícios para achar a função de Green para Equações Diferenciais Parciais.

Exercício 17. (F. 10.2, ex.5) Ache a função de Green do problema do calor na forma de uma série de Fourier:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=f(t,x), & t>0\,\text{e}\,x\in\,]0,l[\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & t>0\\ u(0,x)=0, & x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta: $G(x,t,y,s)=H(t-s)\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}k(t-s)}sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$. Feito em sala de aula.

Exercício 18. (F. 10.2, ex.8) Ache a função de Green do problema da corda vibrante na forma de uma série de Fourier:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)=f(t,x), & t>0\,\text{e}\,x\in\,]0,l[\\ u(t,0)=u(t,l)=0, & t>0\\ u(0,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0, & x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta: $G(x,t,y,s)=H(t-s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi c}sen\left(\frac{n\pi c(t-s)}{l}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)sen\left(\frac{n\pi y}{l}\right)$. Feito em sala de aula.

Exercício 19. (F. 10.2, ex.9) Ache a função de Green para o problema de Dirichlet na forma de uma série de Fourier:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=f(x,y), & (x,y)\in\,]0,1[\times]0,1[\\ u(x,0)=u(x,1)=u(0,y)=u(1,y)=0, & x\in\,]0,1[\,\text{e}\,y\in\,]0,1[\end{cases}.$$

Resposta: $G(x,y,t,s)=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2+n^2}sen(n\pi x)\,sen(m\pi y)\,sen(n\pi t)\,sen(m\pi s)$. Feito em sala de aula.