MAT334/5721 - Análise Funcional - 2023

5ª lista de exercícios

Espaços de Hilbert

1. Seja X um espaço com produto interno. Mostre que se $x \perp y$ então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Vale a recíproca?

2. (Fórmula de Polarização) Seja X um espaço produto interno. Prove que se X é complexo, então
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2\right).$$
No caso de X ser real,
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2\right).$$

3. Considere c_{00} como subespaço de ℓ_2. Mostre que não existe a melhor aproximação de $x = (1/n) \in \ell_2$ em c_{00}. Qual o motivo? *Dica: Calcule primeiro a distância de x a c_{00}.*

4. Em ℓ_2 considere o subconjunto A formado pelas sequências unitárias canônicas. Mostre que não existe a melhor aproximação de $h = (-1/n) \in \ell_2$ no conjunto em A. Qual o motivo?

5. (a) Mostre que $Y = \{x \in l_2 \mid x = (x_i),\ x_{2i} = 0,\ i \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço fechado de l_2 e determine $Y^\perp$.
(b) Seja $Y = [e_1, ..., e_n] \subset l_2$, determine $Y^\perp$.

6. Seja M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H.
(a) Se P_M é a projeção ortogonal de H em M mostre que $Q = Id - P_M$ é a de H em $M^\perp$. *Dica: Basta mostrar que $Q(x) \in M^\perp$ e $x - Q(x)$ é ortogonal a x.*
(b) Mostre que $M^{\perp\perp} = M$.

7. Se A é um subconjunto de um espaço de Hilbert, mostre que $A^\perp = \overline{[A]}^\perp$. Mostre também que $A^{\perp\perp} = \overline{[A]}$. *Dica: Foi parcialmente visto em aula*

8. Mostre que um subespaço M é denso em H se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$. *Dica: Exercício anterior*

9. Seja $y = (y_n)_n \in \ell_\infty$. Defina $M_y : \ell_2 \to \ell_2$ por $M_y(x) = (x_n y_n)_n$. Mostre que M_y é limitado com $\|M_y\| = \|y\|$. Mostre ainda que $M_y^* = M_{\bar{y}}$.

10. Mostre que um operador linear T em um espaço de Hilbert H que satisfaz $< Tx, y >=< x, Ty >, \forall x, y \in H$ é sempre limitado. *Sugestão: Teorema do Gráfico fechado*

11. Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ linear. Se $< Th, h >= 0$, $\forall h \in H$, mostre que $T \equiv 0$. O mesmo é válido para espaços reais?

12. Mostre que $U : H \to H$ é unitário se, e somente se, é um isomorfismo de espaços com produto interno.

13. Mostre que todo subespaço fechado de ℓ_2 ou tem dimensão finita, ou é isomorfo a ℓ_2.