ESCOLA POLITÉCNICA DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

PSI 3212 - 2023
LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Experiência 8
REDES DE SEGUNGA ORDEM

Profa. Elisabete Galeazzo
Profa Laisa Costa de Biase

Objetivos

- Analisar a resposta transitória e permanente de ***circuitos RLC***;

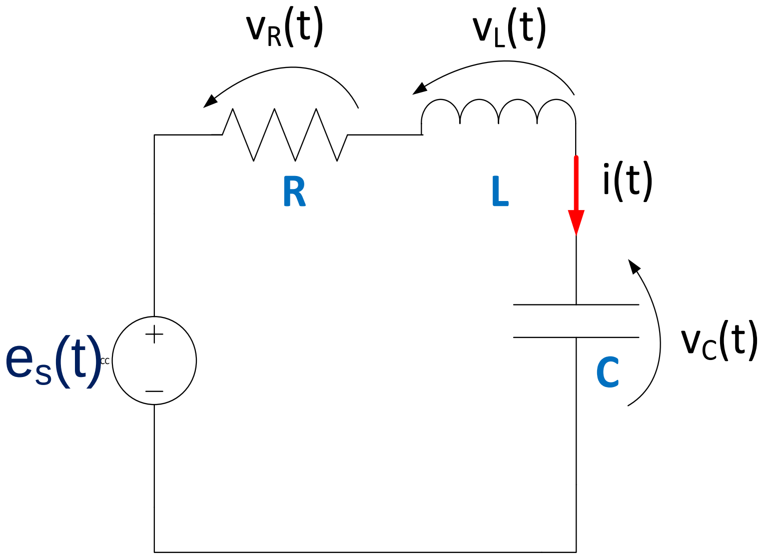
- Determinar experimentalmente:
  - fator de amortecimento (α),
  - frequência amortecida (ω_d) e
  - frequência de ressonância de circuitos RLC (ω_o);

- Estudar o efeito de batimento amortecido em circuitos RLC.

Circuitos de 2ª ordem

- Possuem dois elementos armazenadores de energia **não associados** (ou seja, não podem ser substituídos por um outro equivalente);
- Seu modelo é descrito por uma equação linear com derivadas de **1ª** e de **2ª ordem,** ou duas equações de 1ª ordem;
- **Duas condições iniciais** deverão ser consideradas para obtenção da solução do circuito.

Equações integro-diferenciais associadas aos circuitos RLC série



$$v_R + v_L + v_C = e_s$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_s$$

$$\boldsymbol{\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{de_s(t)}{dt}}$$

Equação diferencial de 2ª ordem:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{de_s(t)}{dt}$$

Objetivo da resolução dessa equação diferencial :

☛ **Determinar a função i(t) que satisfaça a equação acima**

Duas condições iniciais devem ser consideradas

Indicam se há energia armazenada no sistema, e estão relacionadas com:

- *tensão inicial no capacitor (v_o)*
- *corrente inicial no indutor (i_o)*

Equação diferencial de 2ª ordem, cont...

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L}\frac{de_s(t)}{dt}$$

Coeficiente de amortecimento, unidade s^{-1}

Definições: $\boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2L}}$ e $\boldsymbol{\omega_o}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{LC}}$

Frequência de oscilação não amortecida, unidade = rad/s

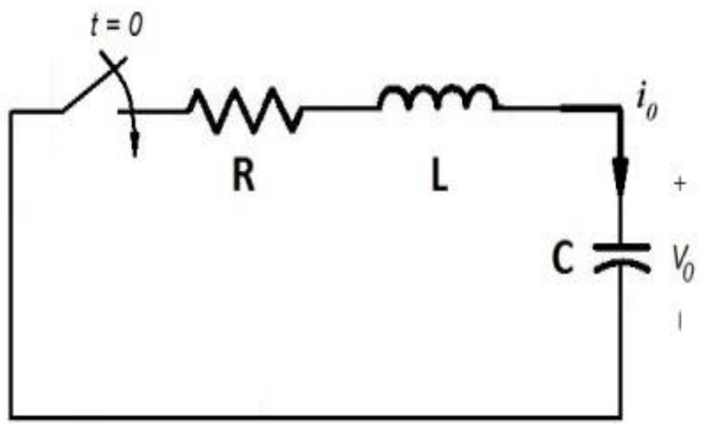
1ª etapa:

Analisar o comportamento "livre" do circuito $\rightarrow$ solução homogênea

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\boldsymbol{\alpha}\frac{di(t)}{dt} + \boldsymbol{\omega_o}^2\, i(t) = 0$$

Equação diferencial de 2ª ordem, linear, ordinária a elementos constantes.

Exemplo: resposta natural de um circuito RLC em série



$$v_c(0) = v_o,$$

$$i_L(0) = \ i_o.$$

$$\boxed{v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0}$$

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(\tau)d\tau + v_o = 0 \Rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

Solução da equação diferencial

$$\frac{d^2 i(t)}{dt} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

$$\boldsymbol{i(t) = Ae^{st}} \ ,$$

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

Parâmetros:

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{R}{2L}}$$

$$\boldsymbol{\omega_o^2 = \frac{1}{LC}} \ ;$$

$$s^2 + 2\boldsymbol{\alpha} s + \boldsymbol{\omega_o}^2 = 0$$

Equação Característica

$$s^2 + 2\alpha s + {\omega_o}^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$$

Três formas da resposta natural do circuito RLC série:

Superamortecida: se ${\omega_o}^2 < \alpha^2$

Subamortecida ou oscilatória: se ${\omega_o}^2 > \alpha^2$,

. **Criticamente Amortecida:** se ${\omega_o}^2 = \alpha^2$,

A solução completa do sinal de saída do circuito

Solução completa da equação =

solução particular + solução homogênea

Solução particular: ***condições iniciais são desprezadas e $e_s(t)$ = cte, pulso, cosseno, etc...***

Solução homogênea: ***condições iniciais são consideradas e $e_s(t) = 0$***

$$\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{A_1} e^{\boldsymbol{s_1} t} + \boldsymbol{A_2} e^{\boldsymbol{s_2} t} + \boldsymbol{x_p(t)}$$

Categorias de respostas dos circuitos de 2ª ordem

1ª categoria: **SUPERAMORTECIMENTO**

$$x(t) = \frac{s_2 a - b}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 a + b}{s_2 - s_1} e^{s_2 t} + x_p(t)$$

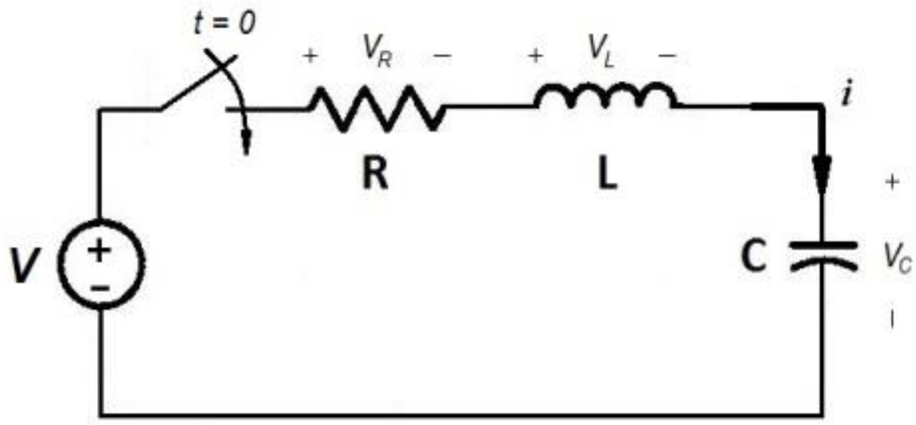
2ª categoria: **SUBAMORTECIMENTO OU OSCILAÇÃO AMORTECIDA**

$$x(t) = X e^{-\alpha t} cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)$$

3ªcategoria : **AMORTECIMENTO CRÍTICO**

$$x(t) = a e^{-\alpha t} + (\alpha a + b)\ t\, e^{-\alpha t} + x_p(t)$$

RESPOSTA DE UM CIRCUITO RLC SÉRIE À EXCITAÇÃO AO DEGRAU



$v_c(t)=?$

$$\boldsymbol{V} = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_c(t)$$

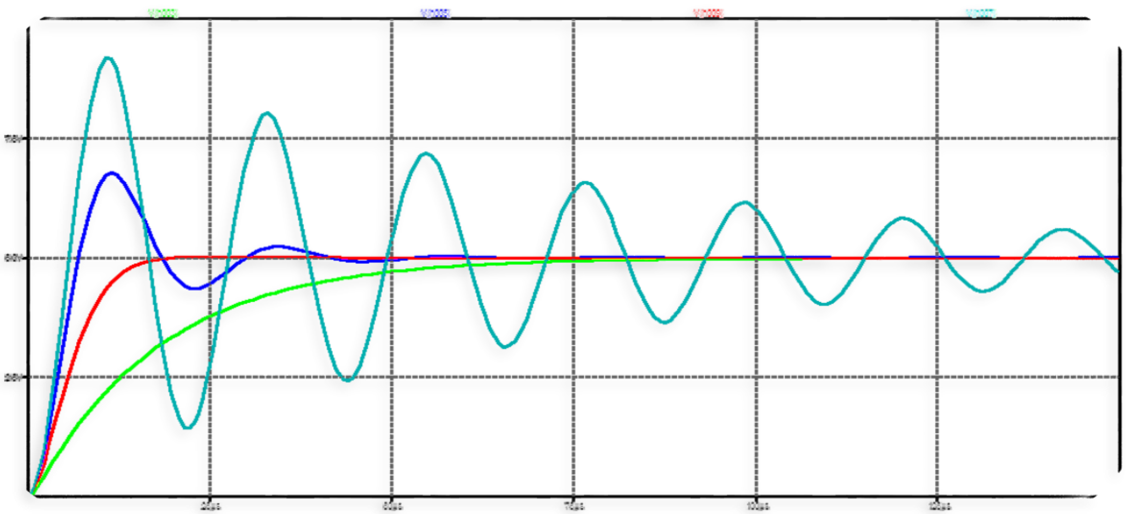
$$\frac{d^2_{v_C}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\left(v_c(t) - \boldsymbol{V}\right) = 0$$

Possíveis respostas à excitação ao degrau

$$v_c(t) = V + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}$$ (superamortecida)

$$v_c(t) = V + B'_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta)$$ (oscilatória)

$$v_c(t) = V + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}$$ (criticamente amortecida)



Resposta completa na situação $s_1 \neq s_2$ e **complexos conjugados**:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {\omega_o}^2}$$

No caso de subamortecimento, temos que: $\boldsymbol{{\omega_o}^2 > \alpha}$

Definindo-se $\boldsymbol{\omega_d = \sqrt{{\omega_o}^2 - \alpha^2}}$, conhecida como frequência própria amortecida, as raízes da equação característica serão:

$$\boldsymbol{s_1 = -\alpha + j\omega_d}$$

$$\boldsymbol{s_2 = -\alpha - j\omega_d}$$

$$\boldsymbol{x(t) = Xe^{-\alpha t}cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)}$$

Oscilação Amortecida – resposta ao degrau

$$x(t) = Xe^{-\alpha t}cos(\omega_d t + \psi) + x_p(t)$$

Note que:

$$(Xe^{-\alpha t})(cos(\omega_d t + \psi))$$

Função exponencial decrescente

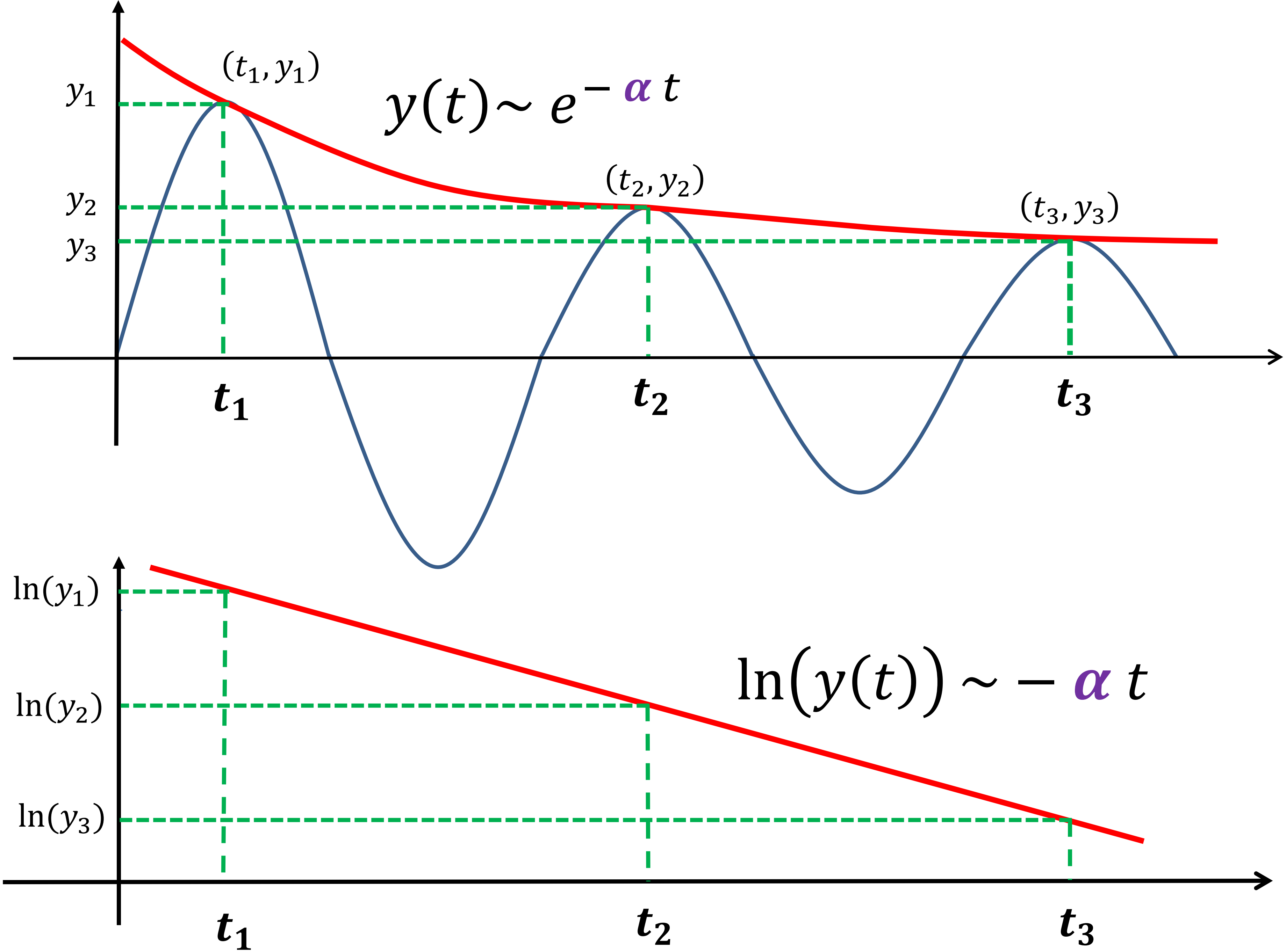
Vai modular a amplitude da função cossenoidal

Função cossenoidal

$$\omega_d = frequência\ de\ oscilação\ amortecida$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_o{}^2 - \alpha^2}$$

Resposta do circuito depois que o transitório se extinguiu.



(t_1, y_1)
y_1
$y(t) \sim e^{-\alpha t}$
(t_2, y_2)
y_2
y_3
(t_3, y_3)
t_1
t_2
t_3
$\ln(y_1)$
$\ln(y(t)) \sim -\alpha t$
$\ln(y_2)$
$\ln(y_3)$
t_1
t_2
t_3

BATIMENTO

- Fenômeno ocorre quando duas funções cossenoidais com frequências muito próximas são somadas.

Lembrando-se da relação trigonométrica:

$$cos(a) + cos(b) = 2.\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Exemplo: soma de duas funções co-senoidais com mesma amplitude e fase:

$$\cos(\omega_1 t) + cos(\omega_2 t) = 2cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right).cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Batimento

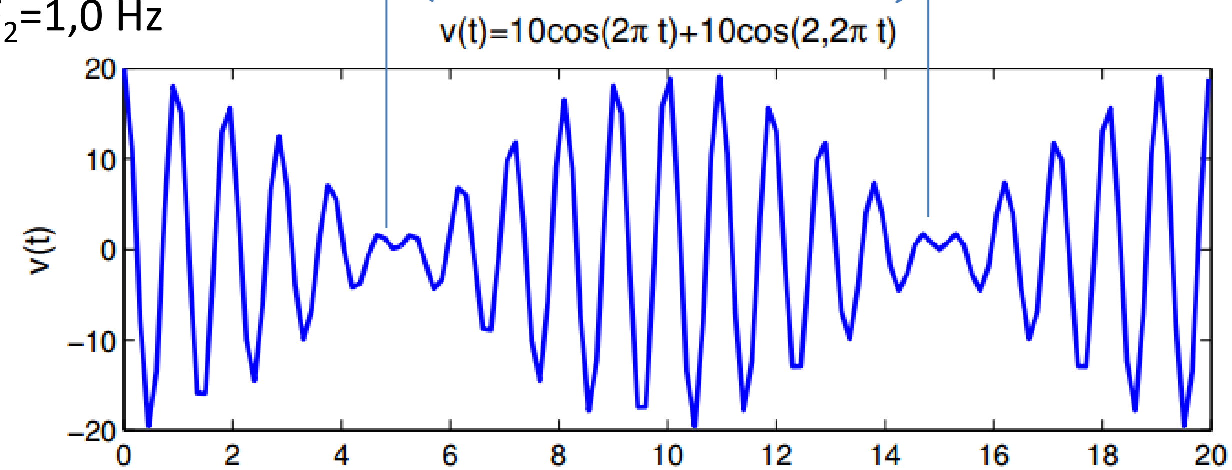
$$f(x) = \cos(\omega_1 t) + cos(\omega_2 t) = \boxed{2cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)} \cdot \boxed{cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)}$$

Modula a amplitude da função f(x)

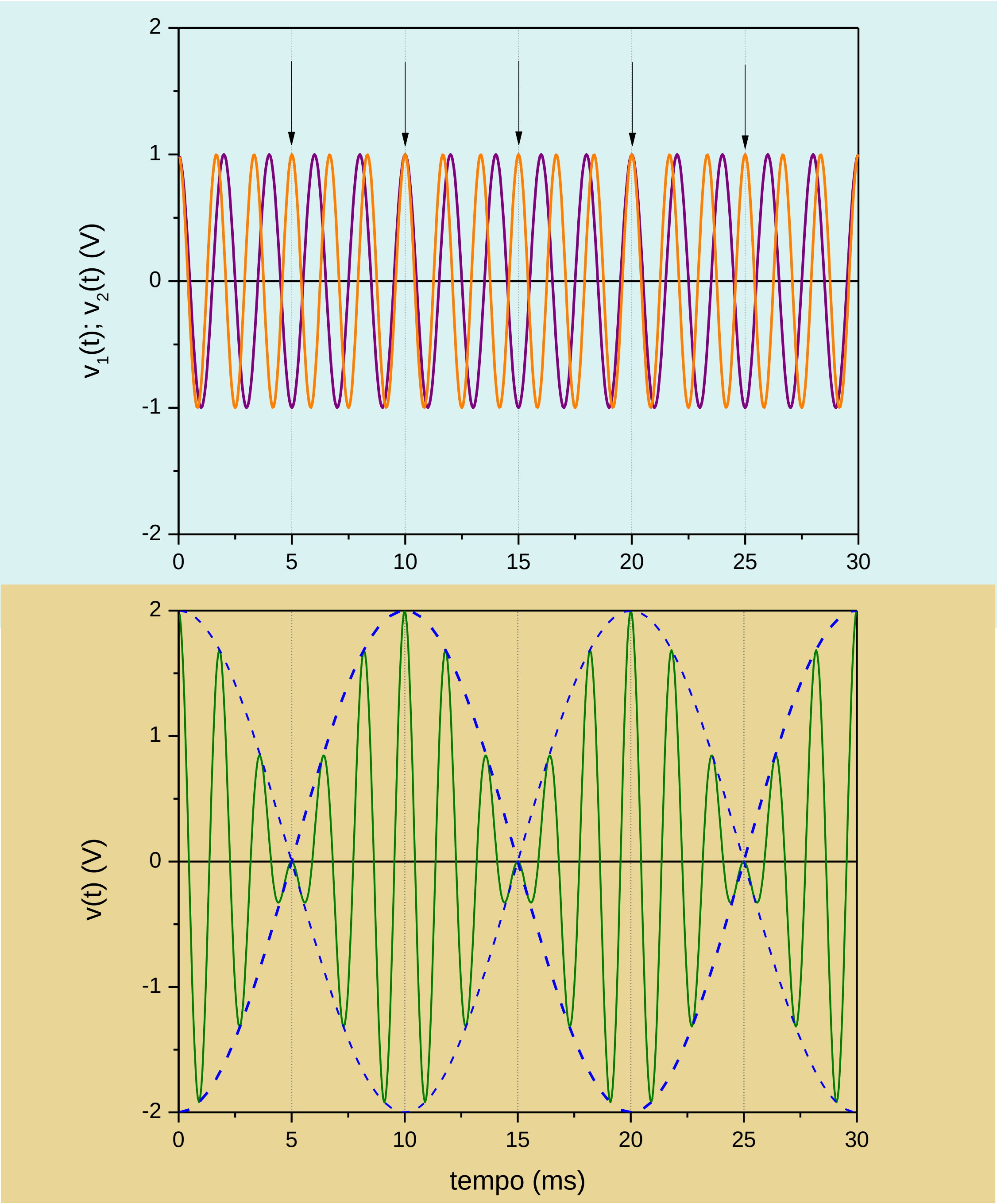
Função f(x) oscila com frequência $\frac{\boldsymbol{\omega_1+\omega_2}}{\mathbf{2}}$

F_1=1,1 Hz
F_2=1,0 Hz

T= 10 s, f = 0,1 Hz



Batimento...



Exemplo de batimento em circuitos RLC

- Circuito RLC paralelo subamortecido, altamente oscilatório, excitado por $i_s(t) = Icos(\omega t)$, para t > 0s

$$v(t) = Ae^{-\alpha t}cos(\omega_d t + \theta) + Vcos(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \omega_d \cong \omega_o \; pois \; \alpha \ll \omega_d$$
$$\rightarrow A = V \; e \; \theta = \varphi$$