# AULA Nº 17
# Álgebra Linear para Engenharia II
# Prof. Pedro L. Fagundes

## Sistema de EDO de 1º grau

# Sistema de EDO de 1º grau

**Um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1º grau *S* com *n* equações é um sistema do tipo:**

$$S: \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

**onde $a_{ij} \in R$, $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ são funções reais com a 1ª derivada contínua (Vetores de $C^1(R)$)**

# Sistema de EDO de 1º grau

Sejam $A = (a_{ij})$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$.

Assim o sistema $S$ se escreve na forma matricial:

$$S: X'(t) = AX(t)$$

Queremos encontrar as soluções de $S$.

# Sistema de EDO de 1º grau

**Ex.**

**a)** $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases}$

**O par de funções $x(t) = e^{2t}$ e $y(t) = e^{-3t}$, são soluções de $S$,**

# Sistema de EDO de 1º grau

**Ex.**

**a)** $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases}$

**O par de funções** $x(t) = e^{2t}$ **e** $y(t) = e^{-3t}$**, são soluções de** $S$**,** $x'(t) = 2.e^{2t}$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Ex.**

**a)** $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases}$

**O par de funções $x(t) = e^{2t}$ e $y(t) = e^{-3t}$, são soluções de $S$, $x'(t) = 2.e^{2t} = 2x(t)$**

# Sistema de EDO de 1º grau

**Ex.**

**a)** $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases}$

**O par de funções** $x(t) = e^{2t}$ **e** $y(t) = e^{-3t}$**, são soluções de** $S$**,** $x'(t) = 2.e^{2t} = 2x(t)$ **e** $y'(t) = -3.e^{-3t}$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Ex.**

**a)** $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases}$

**O par de funções $x(t) = e^{2t}$ e $y(t) = e^{-3t}$, são soluções de $S$, $x'(t) = 2.e^{2t} = 2x(t)$ e $y'(t) = -3.e^{-3t} = -3y(t)$.**

**Dada uma constante $c \in R$, a função $z(t) = ce^{2t}$ é uma outra solução da 1ª equação de $S$, $z'(t) = 2.ce^{2t}$**

**A solução geral de $S$ é** $\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \\ y(t) = c_2 e^{-3t} \end{cases}; \ c_1, c_2 \in R$

# Sistema de EDO de 1º grau

Vamos escrever o exemplo anterior na forma matricial.

$$S:\begin{cases} x'(t) = 2x(t) \\ y'(t) = -3y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Repare que neste exemplo a matriz do sistema é uma matriz diagonal

# Sistema de EDO de 1º grau

b) $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$

Na forma matricial $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, neste caso a matriz do sistema não é diagonal, será que ela é diagonalizável?

$$det\begin{pmatrix} 2-t & 2 \\ 1 & 3-t \end{pmatrix} = (2-t)(3-t) - 2 = t^2 - 5t + 4$$

Cujas raízes são $t = 1$ e $t = 4$, portanto diagonalizável.

Vamos achar seus autovetores:

# Sistema de EDO de 1º grau

$\boldsymbol{V(1)}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = a \\ a + 3b = b \end{cases} \Rightarrow a = -2b$$

**autovetor** $u = (-2, 1)$

$\boldsymbol{V(4)}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 4a \\ a + 3b = 4b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

**autovetor** $u = (1, 1)$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Afirmação:**

**A solução geral de $S$ é:**

$$X(t) = \left(x(t), y(t)\right) = c_1 e^{t}(-2, 1) + c_2 e^{4t}(1, 1)$$

**Ou seja.**

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} \\ y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{4t} \end{cases} ;\ c_1, c_2 \in R$$

**Vamos verificar:**

# Sistema de EDO de 1º grau

$$x'(t) = -2c_1e^t + 4c_2e^{4t}$$

$$2x(t) + 2y(t) = -4c_1e^t + 2c_2e^{4t} + 2c_1e^t + 2c_2e^{4t} =$$

$$= -2c_1e^t + 4c_2e^{4t} = x'(t)$$

$$y'(t) = c_1e^t + 4c_2e^{4t}$$

$$x(t) + 3y(t) = -2c_1e^t + c_2e^{4t} + 3c_1e^t + 3c_2e^{4t} =$$

$$= c_1e^t + 4c_2e^{4t} = y'(t)$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Dado um sistema $S$ na forma matricial, $S: X'(t) = AX(t)$, onde a matriz $A \in M_n(R)$ é diagonalizável.**

**Se $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ são os autovalores de $A$ associados aos autovetores $u_1, u_2, \ldots, u_n$, então a solução geral do sistema $S$ é dada por:**

$$X(t) = c_1 e^{\beta_1 t} u_1 + c_2 e^{\beta_2 t} u_2 + \cdots + c_n e^{\beta_n t} u_n$$

**Onde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ e $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$**

# Sistema de EDO de 1º grau

c) $S: \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = 3y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = 2y(t) \end{cases}$

Na forma matricial $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

# Sistema de EDO de 1º grau

$$det\begin{pmatrix} 2-t & 4 & 0 \\ 0 & 3-t & 2 \\ 0 & 2 & -t \end{pmatrix} = (2-t)\big((3-t)(-t)-4\big) =$$

$$= (2-t)\big(t^2-3t-4\big) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=4 \\ t=-1 \end{cases}$$

Vamos encontrar os autovetores.

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(2)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 2a \\ 3b + 2c = 2b \\ 2b = 2c \end{cases} \Rightarrow b = c = 0$$

autovetor $u = (1, 0, 0)$

$V(4)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 4a \\ 3b + 2c = 4b \\ 2b = 4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4c \\ b = 2c \end{cases}$$

autovetor $u = (4, 2, 1)$

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(-1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4b = -a \\ 3b + 2c = -b \\ 2b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3}b \\ c = -2b \end{cases}$$

autovetor $u = (-\frac{4}{3}, 1, -2)$ ou $v = (4, -3, 6)$

Solução geral:

$$X(t) = c_1 e^{2t}(1, 0, 0) + c_2 e^{4t}(4, 2, 1) + c_3 e^{-t}(4, -3, 6)$$

Ou ainda:

# Sistema de EDO de 1º grau

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{2t} + 4c_2e^{4t} + 4c_3e^{-t} \\ y(t) = 2c_2e^{4t} - 3c_3e^{-t} \\ z(t) = c_2e^{4t} + 6c_3e^{-t} \end{cases} ;\ c_1, c_2, c_3 \in R$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Teorema de Existência e Unicidade:**

**Dado um sistema de EDO de 1º grau $S: X'(t) = AX(t)$, com $n$ equações e $n$ condições iniciais.**

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_2) \\ \vdots \\ x_n(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

**Existe uma única solução $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ de $S$ que verifica as $n$ condições iniciais.**

# Sistema de EDO de 1º grau

**Na aula anterior, resolvemos o sistema $S: X'(t) = AX(t)$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ cuja solução geral é:**

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1e^t + c_2e^{4t} \\ y(t) = c_1e^t + c_2e^{4t} \end{cases}; \ c_1, c_2 \in R,$$

**Suponha dadas as condições iniciais** $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$,

# Sistema de EDO de 1º grau

Na aula anterior, resolvemos o sistema $S: X'(t) = AX(t)$, onde $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ cuja solução geral é:

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1e^t + c_2e^{4t} \\ y(t) = c_1e^t + c_2e^{4t} \end{cases} ;\ c_1, c_2 \in R,$$

Suponha dadas as condições iniciais $\begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$, então existe um único par de funções $(x(t), y(t))$ soluções de $S$ que satisfazem estas condições iniciais.

# Sistema de EDO de 1º grau

**Impondo as condições iniciais, temos:**

$$\begin{cases} x(0) = -2c_1e^0 + c_2e^{4.0} = -1 \\ y(0) = c_1e^0 + c_2e^{4.0} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1' \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Impondo as condições iniciais, temos:**

$$\begin{cases} x(0) = -2c_1e^0 + c_2e^{4.0} = -1 \\ y(0) = c_1e^0 + c_2e^{4.0} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$, **assim a única solução deste sistema com as condições iniciais dadas é:**

$$\begin{cases} x(t) = -2e^t + e^{4t} \\ y(t) = e^t + e^{4t} \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

Resolva o sistema $S$: $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 4y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = -2z(t) \end{cases}$ com as condições iniciais $X(0) = (1, -1, 8)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(t) = det \begin{pmatrix} 4-t & 2 & 1 \\ 2 & 4-t & -3 \\ 0 & 0 & -2-t \end{pmatrix}$$

$$(-2-t)\left((4-t)^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ 4 - t = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(-2)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = -2x \\ 2x + 4y - 3z = -2y \\ -2z = -2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + z = 0 \\ 2x + 6y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{3}x \\ z = -\frac{8}{3}x \end{cases}, V(-2) = [(3, -5, -8)]$$

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(2)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 2x \\ 2x + 4y - 3z = 2y \\ -2z = 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}, V(2) = [(1, -1, 0)]$$

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(6)$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 6x \\ 2x + 4y - 3z = 6y \\ -2z = 6z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}, V(6) = [(1,1,0)]$$

**Assim a solução geral de $S$ é:**

# Sistema de EDO de 1º grau

$\boldsymbol{X(t) = ae^{-2t}(3,-5,-8) + be^{2t}(1,-1,0) + ce^{6t}(1,1,0)}$, **ou**

$$\begin{cases} x(t) = 3ae^{-2t} + be^{2t} + ce^{6t} \\ y(t) = -5ae^{-2t} - be^{2t} + ce^{6t}, a, b, c \in R \\ z(t) = -8ae^{-2t} \end{cases}$$

**Impondo as condições iniciais** $\boldsymbol{X(0) = (1,-1,8)}$

$$\begin{cases} x(0) = 3a + b + c = 1 \\ y(0) = -5a - b + c = -1 \\ z(0) = -8a = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -1 \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Logo a única solução de $S$ com as condições iniciais dadas é:**

$$\begin{cases} x(t) = -3e^{-2t} + 5e^{2t} - e^{6t} \\ y(t) = 5e^{-2t} - 5e^{2t} - e^{6t} \\ z(t) = 8e^{-2t} \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Resolva a equação diferencial ordinária homogênea de 2ª ordem $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 0$ com as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 4$.**

**Fazendo $y(t) = x'(t) \Rightarrow y'(t) = x''(t)$, da equação acima temos que $x''(t) = -x'(t) + 2x(t) = -y(t) + 2x(t)$**

**Dessa forma, a equação acima se transforma no sistema de 1º grau:**

$$S: \begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$$

**Com a condição inicial $\big(x(0), y(0)\big) = (1, 4)$**

# Sistema de EDO de 1º grau

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(t) = det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 2 & -1-t \end{pmatrix} =$$

$$= (-t)(-1-t) - 2 = t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$V(1)$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x - y = y \end{cases} \Rightarrow x = y$, logo

$V(1) = [(1,1)]$.

# Sistema de EDO de 1º grau

$V(-2)$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2x - y = -2y \end{cases} \Rightarrow y = -2x$, logo

$V(-2) = [(1, -2)]$.

Solução geral de $S$:

$X(t) = ae^{t}(1,1) + be^{-2t}(1,-2)$, ou ainda:

$$\begin{cases} x(t) = ae^{t} + be^{-2t} \\ y(t) = ae^{t} - 2be^{-2t} \end{cases}$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Impondo as condições iniciais:**

$$\begin{cases} x(0) = a + b = 1 \\ y(0) = a - 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

**Logo a única solução de $S$ com as condições iniciais dadas é:**

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{t} - e^{-2t} \\ y(t) = 2e^{t} + 2e^{-2t} \end{cases}$$

**A solução da equação de 2º grau é $x(t) = 2e^{t} - e^{-2t}$**

# Sistema de EDO de 1º grau

**Vamos verificar:**

$$x(t) = 2e^{t} - e^{-2t} \Rightarrow x'(t) = 2e^{t} + 2e^{-2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''(t) = 2e^{t} - 4e^{-2t}$$

**substituindo na equação:**

$$x''(t) + x'(t) - 2x(t) =$$

$$= 2e^{t} - 4e^{-2t} + 2e^{t} + 2e^{-2t} - 2\left(2e^{t} - e^{-2t}\right) = 0.$$

# Sistema de EDO de 1º grau

Resolva o sistema $S$: $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \\ z'(t) = 2z(t) + 2w(t) \\ w'(t) = z(t) + 3w(t) \end{cases}$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

# Sistema de EDO de 1º grau

## A solução geral de $S$ é:

$$S: \begin{cases} x(t) = ae^{t} + be^{-2t} \\ y(t) = ae^{t} - 2be^{-2t} \\ z(t) = -2ce^{t} + de^{4t} \\ w(t) = ce^{t} + de^{4t} \end{cases}, a, b, c, d \in R$$

# Sistema de EDO de 1º grau

**Dado o sistema $S$: $\begin{cases} x'(t) = ax(t) - by(t) \\ y'(t) = bx(t) + ay(t) \end{cases}$, a sua matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ não é diagonalizável pois seu polinômio caraterístico $p_A(t) = (a - t)^2 + b^2$ possui duas raízes complexas conjugadas $z = a \pm ib$ $(i^2 = -1)$**

**Neste caso a solução geral de $S$ é dada por:**

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{at} cosbt - c_2 e^{at} senbt \\ y(t) = c_1 e^{at} senbt + c_2 e^{at} cosbt \end{cases}; \; c_1, c_2 \in R$$

**Ou $X(t) = c_1 e^{at}(cosbt, senbt) + c_2 e^{at}(-senbt, cosbt)$.**

# Sistema de EDO de 1º grau

Ex. $S$: $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$

$$det\begin{pmatrix} 2-t & -1 \\ 1 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2+i \\ t = 2-i \end{cases}$$

Solução geral é:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} cost - c_2 e^{2t} sent \\ y(t) = c_1 e^{2t} sent + c_2 e^{2t} cost \end{cases};\ c_1, c_2 \in R$$

# AULA Nº 17
# Álgebra Linear para Engenharia II
# Prof. Pedro L. Fagundes

## Sistema de EDO de 1º grau