Mecânica Estatística – 4302401

Respostas da lista de exercícios 5

Segundo semestre de 2023

1. (a) A densidade de estados (constante!) é dada por

$$D(\epsilon) = \frac{\gamma A m}{2\pi\hbar^2}.$$

Se as partículas têm spin $\frac{1}{2}$, vale $\gamma = 2$.

(b) A energia de Fermi ϵ_F é

$$\epsilon_F = \frac{\pi\hbar^2 N}{\gamma A m}.$$

A temperatura de Fermi é

$$T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B} = \frac{\pi\hbar^2 N}{\gamma A m k_B}.$$

(c) Nessa faixa de temperaturas, a energia média por partícula é

$$u = \frac{E}{N} = \frac{1}{2}\epsilon_F\left[1 + \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2\right].$$

O calor específico a área constante é

$$c_A = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{N,A} = \frac{\pi^2}{3}k_B\frac{T}{T_F},$$

A entropia, nesse nível de aproximação, coincide com o calor específico.

(d) No limite semiclássico, a energia interna por partícula é

$$u(T,a) == k_B T,$$

e o calor específico por partícula é

$$c_A = k_B.$$

A entropia por partícula é dada por

$$s(T,a) = k_B \ln\left(\frac{2\pi\gamma m k_B T}{h^2}\right).$$

(e) Para traçar os gráficos, a sugestão é adaptar o notebook utilizado para os cálculos tridimensionais, fornecido no E-disciplinas.

2. Calculando e igualando as potências emitida e absorvida, temos para a Terra uma temperatura de equilíbrio

$$T_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{R_\odot}{2d}} T_\odot,$$

sendo $R_\odot$o raio do Sol, $T_\odot$ a temperatura do Sol e d o raio da órbita da Terra.

3. (a) No limite de altas temperaturas, a energia interna por átomo é

$$u = 2k_B T,$$

de modo que o calor específico a área constante é

$$c_A = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{N,A} = 2k_B.$$

(b) No limite de baixas temperaturas, a energia interna por átomo é

$$u = \frac{A\hbar}{N\pi c^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3 \zeta\left(3\right)\Gamma\left(3\right) = \frac{2.4041\, A\hbar}{N\pi c^2}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^3,$$

o que implica um calor específico a área constante dado por

$$c_A = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_A = \frac{7.2123\, A}{N\pi c^2} k_B \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^2.$$

(c) A escala de temperatura que "separa" os regimes de altas e de baixas temperaturas é $T_D = \hbar\omega_D / k_B$.

4. (a) A grande função de partição do sistema é

$$\Xi\left(\beta, V, z\right) = \left(1 + z + z^2 e^{-\beta\epsilon}\right)^{V/v_0}.$$

(b) A demonstração pode ser feita a partir da relação

$$N = z\left(\frac{\partial \ln \Xi}{\partial z}\right)_{\beta,V},$$

resolvendo para z.

(c) Até segunda ordem em c, a pressão é tal que

$$\frac{p}{k_B T} \approx \frac{1}{v} + \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-\beta\epsilon}\right)\frac{v_0}{v^2}.$$

Portanto, o segundo coeficiente do virial para esse sistema é

$$B_2 = \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-\beta\epsilon}\right) v_0.$$

5. As relações são

$$v_c = 2b, \qquad k_B T_c = \frac{a}{4b}, \qquad p_c = \frac{a}{4b^2} e^{-2}.$$

Temos então, para a equação de Dieterici,

$$\frac{k_B T_c}{v_c p_c} = \frac{e^2}{2} \simeq 3{,}7,$$

enquanto para a equação de van der Waals temos

$$\frac{k_B T_c}{v_c p_c} = \frac{8}{3} \simeq 2{,}7.$$

Portanto, a equação de Dieterici reproduz melhor os valores experimentalmente medidos da combinação $k_B T_c / v_c p_c$.

6. (a) Cada conexão desencaixada contribui ϵ para a energia, de modo que $E_n = n\epsilon$

(b) Cada conexão desencaixada contribui uma multiplicidade G, e as multiplicidades se multiplicam, de modo que $\Omega_n = G^n$.

(c) A função de partição é

$$Z = \frac{1 - \left(Ge^{-\beta\epsilon}\right)^N}{1 - Ge^{-\beta\epsilon}}.$$

A soma vai apenas até $n = N - 1$ porque a última conexão sempre permanece encaixada.

(d) A energia livre é

$$F = k_B T \ln\left[\frac{1 - Ge^{-\beta\epsilon}}{1 - \left(Ge^{-\beta\epsilon}\right)^N}\right].$$

Enquanto $Ge^{-\beta\epsilon} < 1$, ou seja, enquanto $T < T_c = \epsilon / k_B \ln G$, tanto o numerador quanto o denominador no argumento do logaritmo são positivos, e supondo $N \gg 1$ vale

$$F\left(T < T_c\right) \approx k_B T \ln\left(1 - Ge^{-\beta\epsilon}\right).$$

Por outro lado, se $Ge^{-\beta\epsilon} > 1$, ou seja, se $T > T_c$, tanto o numerador quanto o denominador no argumento do logaritmo são negativos e vale

$$F\left(T > T_c\right) \approx -N k_B T \ln\left(Ge^{-\beta\epsilon}\right).$$

(e) A energia média é dada por

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{\partial \left(\beta F\right)}{\partial \beta}.$$

Acima da temperatura crítica, temos

$$\langle E\rangle \approx \frac{NG\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{Ge^{-\beta\epsilon}} = N\epsilon,$$

e portanto o zíper está aberto, já que $\langle n\rangle \approx N$. Por outro lado, abaixo da temperatura crítica, temos

$$\langle E\rangle \approx \frac{G\epsilon e^{-\beta\epsilon}}{1 - Ge^{-\beta\epsilon}},$$

e portanto $\langle n\rangle = O\left(1\right)$, ou seja, o zíper está fechado.

7. (a) Descartar os termos contendo o produto das flutuações é válido quando se espera que as correlações entre essas flutuações em spins vizinhos sejam pequenas, ou seja, quando a flutuação de um spin afetar pouco a flutuação de um spin vizinho. Isso deve ocorrer em temperaturas muito acima ou muito abaixo da temperatura crítica, ou ainda quando o número de vizinhos de um spin qualquer for muito grande.

(b) A primeira relação decorre de desprezar o termo $\delta\sigma_i\delta\sigma_j$ no produto

$$\left(\langle\sigma\rangle + \delta\sigma_i\right)\left(\langle\sigma\rangle + \delta\sigma_j\right) \approx \langle\sigma\rangle^2 + \langle\sigma\rangle\left(\delta\sigma_i + \delta\sigma_j\right) = \langle\sigma\rangle\left(\sigma_i + \sigma_j\right) - \langle\sigma\rangle^2.$$

Com isso, é possível reescrever o hamiltoniano na forma

$$H \approx \frac{Nq}{2}\langle\sigma\rangle^2 - \sum_j \mu_0 B_{\text{ef}}\sigma_j,$$

com

$$B_{\text{ef}} = B + \frac{qJ}{\mu_0}\langle\sigma\rangle.$$

Para escrever a função de partição, basta notar que agora o hamiltoniano corresponde ao de uma coleção de spins não interagentes.

(c) Os extremos de F em relação a $\langle\sigma\rangle$ são dados pela solução da equação

$$\langle\sigma\rangle = \tanh\left(\beta\mu_0 B + \beta qJ\langle\sigma\rangle\right),$$

mesmo resultado obtido, por outra abordagem, nas notas de aula.

(d) A energia livre tem um máximo local em $\langle\sigma\rangle = 0$ para $T < T_c$.

(e) Os gráficos são qualitativamente idênticos àqueles na figura 11 das notas sobre sistemas interagentes.

(f) A expansão da energia livre em torno de $\langle\sigma\rangle = 0$ produz

$$F = -Nk_BT\ln 2 + \frac{qJ}{2}\left(1 - \frac{qJ}{k_BT}\right)\langle\sigma\rangle^2 + \frac{q^4J^4}{12\,(k_BT)^3}\langle\sigma\rangle^4 + \cdots .$$

O coeficiente do termo quadrático em $\langle\sigma\rangle$ pode ainda ser reescrito como

$$\frac{qJ}{2}\left(1 - \frac{T_c}{T}\right) = \frac{qJ}{2T}(T - T_c)$$

que, quando $T \to T_c$, assume ainda a forma

$$\frac{qJ}{2T}(T - T_c) \approx \frac{qJ}{2T_c}(T - T_c) .$$

Portanto,

$$a = \frac{qJ}{2T_c} = \frac{k_B}{2} > 0.$$