SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Discutimos bastante sequências e séries numéricas. Discutiremos agora sequências e séries de funções que são extremamente úteis em quase todas as áreas da matemática e ciências que usam matemática.

Por exemplo, sabemos que se $0 \leq |x| < 1$, então $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Assim, a sequência de funções $f_n : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

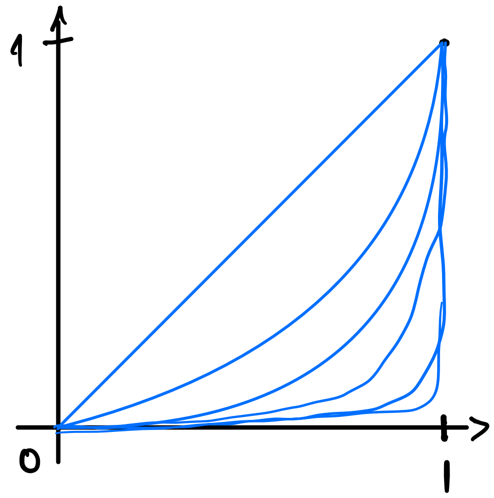
$$f_n(x) = x^n$$

tem a propriedade: $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall\, x \in (-1,1)$. Dizemos que f_n converge ponto-a-ponto para a função $f(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in (-1,1)$.

Por outro lado, como $1^n = 1 \ \forall n$, poderíamos também definir $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e g_n converge ponto-a-ponto para a função

$$g : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

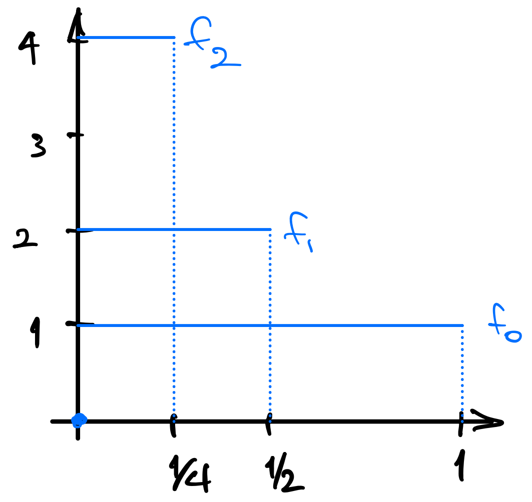
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Os gráficos ao lado são no intervalo $[0,1]$.
Como são os gráficos em $[-1,0]$?

Observação Importante: A sequência g_n é uma sequência de funções contínuas e, no entanto, seu limite g é descontínua. Isto é continuidade não é preservada por limites ponto-a-ponto.

Exemplo : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2^n & \text{se } 0 < x < 1/2^n \\ 0 & \text{se } x \in [1/2^n, 1] \end{cases}$



Nesse caso, é claro que f_n converge para a função constante $\equiv 0$. No entanto,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \equiv 1$$

Portanto

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Tanto o problema de continuidade do limite quanto da troca do limite com a integral são resolvidos introduzindo uma noção de convergência <u>mais forte</u>.

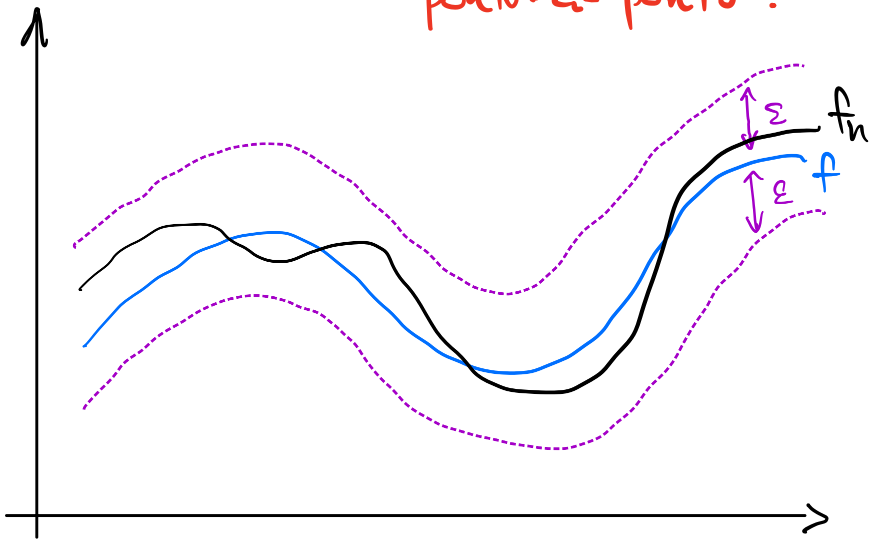
<u>Def</u>: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções e S um subconjunto dos domínios das f_n. Dizemos que <u>f_n converge uniformemente em S</u> para f se vale a seguinte propriedade:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq N \text{ e } \forall x \in S$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

diferença crucial para convergência ponto-a-ponto!

Isto é, as funções f_n estão <u>uniformemente</u> ε-próximas de f a partir de $n = N$.



Teorema: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções e suponha que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente em S. Se $p \in S$ é um ponto no qual todas as funções f_n são contínuas, então f é contínua em p.

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in S$ e todo $n \geq N$. Agora escolha $\delta > 0$ tal que se $x \in S$ e $|x - p| < \delta$, então $|f_N(x) - f_N(p)| < \varepsilon/3$. Então

$$|f(x) - f(p)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Isso mostra que $\forall x \in S$ com $|x - p| < \delta$, $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$, isto é, f é contínua em p (como uma função definida em S). ■

É psicologicamente muito útil reinterpretar esse teorema em termos de uma troca da ordem em que tomamos limites: se $f_n \to f$ uniformemente e

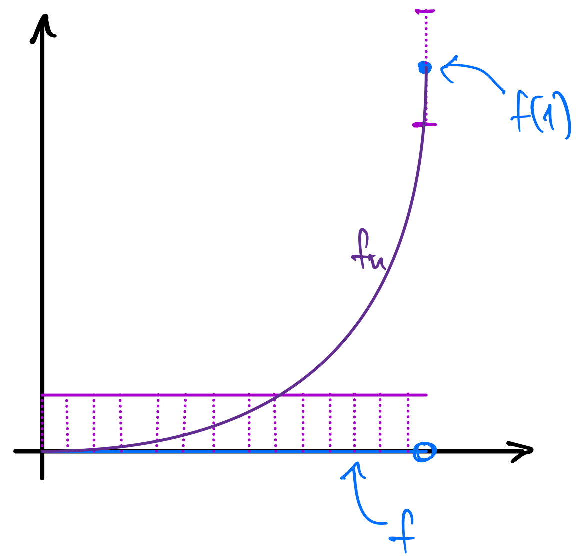
$$\lim_{x \to p} f_n(x) = f_n(p)$$

então

$$\boxed{\lim_{x \to p} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to p} f_n(x)}$$

$$\begin{array}{ccc} \shortparallel & & \shortparallel \\ \lim_{x \to p} f(x) & = & \lim_{n \to \infty} f_n(p) = f(p) \end{array}$$

Vejamos o que dá errado com a sequência $x \xrightarrow{f_n} x^n$ em $[0,1]$.
Essa sequência, como vimos, converge para a função descontínua f onde $f(x) = 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$.

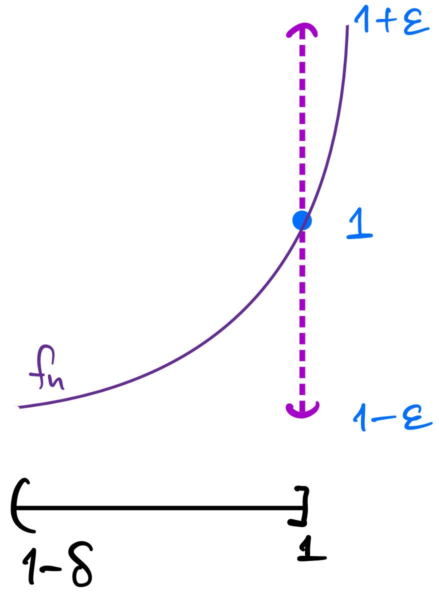


Primeiro, f_n NÃO CONVERGE UNIFORMEMENTE:

As funções f_n são contínuas em 1, claro. O problema é que, em $x = 1$, a relação entre ε's e δ's depende de n e "piora" à medida que n aumenta.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que, se $|x-1| < \delta$ então $|x^n - 1| < \varepsilon$. Como x^n é monótona crescente em $x \geq 0$, a desigualdade que deve ser satisfeita é

$$\left|(1-\delta)^n - 1\right| < \varepsilon \iff 1-(1-\delta)^n < \varepsilon$$



Usando o Teorema Binomial e lembrando que $0<\delta \ll 1$ e, portanto, $\delta^k \ll \delta$, podemos usar a aproximação

$$(1-\delta)^n \cong 1-n\delta$$

Nesse caso, a desigualdade $1-(1-\delta)^n < \varepsilon$ é aproximadamente a mesma que

$$n\delta < \varepsilon \iff \boxed{\delta < \varepsilon/n}$$

Isso mostra que, no ponto $x=1$, embora as funções f_n sejam contínuas, os δ's para $\varepsilon>0$ dado vão ficando cada vez menores à medida que n cresce. "No limite", $\delta=0$ e a função f não é mais contínua.

Séries: Como já vimos, séries de funções são importantes, por exemplo, na resolução de EDO lineares.

Se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções e f_n são as somas parciais da série $\sum u_n$, isto é,

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

dizemos que a série $\sum u_n$ converge ponto-a-ponto ou uniformemente para a função f se $f_n \longrightarrow f$ ponto-a-ponto ou uniformemente, respectivamente. Segue do teorema anterior que

Teorema: Seja $\sum u_n$ uma série de funções contínuas convergindo uniformemente para uma função f. Então f é contínua.

É novamente psicologicamente útil observar que esse teorema pode ser interpretado como uma troca de ordem em que tomamos dois limites:

$$\boxed{\lim_{x\to p}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to p}u_n(x)}$$

$$\begin{array}{ccccc} \| & & \| & & \\ \lim_{x\to p} f(x) & = & f(p) & = & \sum_{n=1}^{\infty}u_n(p) \end{array}$$

Convergência uniforme e integração

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas e contínuas em $[a,b]$ e suponha que $f_n \to f$ uniformemente em $[a,b]$. Defina

$$g_n(x) = \int_a^x f_n(s)\,ds \quad \text{e} \quad g(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

<u>Teorema</u>: $g_n \to g$ uniformemente em $[a,b]$, isto é,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(s)\,ds = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(s)\right) ds}$$

Mais uma troca da ordem
em que tomamos limites
(já que integração envolve limites)

Prova: Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então

$$|f_n(s) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall s \in [a,b].$$

Então, $\forall x \in [a,b]$, vale

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \int_a^x f_n(s) - f(s)\, ds \right| \leq \int_a^x |f_n(s) - f(s)|\, ds \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

E diferenciação? Falaremos disso mais longamente a seguir, mas aqui está um exemplo que mostra que convergência uniforme não resolve esse problema:

Exemplo: $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{sen} nx \Rightarrow f_n'(x) = \cos nx$: embora $f_n \rightrightarrows 0$ uniformemente, f_n' não converge.

Integração de séries termo-a-termo: O teorema anterior se aplica a séries.

Seja $\sum u_n$ uma série de funções contínuas convergindo uniformemente para uma função f em $[a,b]$ e defina

$$g_n(x) = \int_a^x \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(s)\right) ds = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(s)\,ds$$

$$g(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

Teorema: $g_n \to g$ uniformemente, isto é,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_k(s)\,ds = \int_a^x \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(s)\right) ds}$$

Mais uma vez, troca de limites.

O Teste de Weierstrass

Uma forma útil de verificar se uma série converge uniformemente é o seguinte

<u>Teorema</u> (Teste-M de Weierstrass): Seja $\sum u_n$ uma série de funções que converge pontualmente para uma função f num conjunto S. Suponha que existe uma série numérica $\sum M_n$ positiva e convergente tal que, para todo $x \in S$, e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(*) \qquad 0 \leq |u_n(x)| \leq M_n.$$

Então a série $\sum u_n$ converge uniformemente em S.

<u>Prova</u>: Para cada $x \in S$, o teste da comparação e $(*)$ implicam que $\sum u_n(x)$ é absolutamente convergente. Assim

$$\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} M_n}_{\text{isso não depende de } x!}.$$

Como $\sum M_n$ é convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que, para $n \geq N$, $\sum_{n+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Segue assim que

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon \,, \quad \forall x \in S \,,$$

que prova a convergência uniforme. ■

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,,$$

onde a_n e z_0 são números reais ou complexos, é chamada uma SÉRIE DE POTÊNCIAS EM $(z - z_0)$.

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ é uma série de potências onde $z_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$.

Usando o Teste da Razão, obtemos

$$\frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \frac{|z|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C}.$$

Isso mostra que a série $\sum z^n/n!$ converge absolutamente para qualquer escolha de $z \in \mathbb{C}$, e portanto define uma função de z:

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n! \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n z^n$. Aqui $z_0 = z$ novamente e $a_n = n^2 3^n$

Pelo Teste da Raiz

$n^{1/n} \to 1$

$$a_n^{1/n} = (n^2)^{1/n} \cdot 3 \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

$$\Rightarrow \quad (a_n z^n)^{1/n} = a_n^{1/n} z \xrightarrow[n\to\infty]{} 3z$$

Assim, a série $\sum |a_n z^n|$ converge para toda escolha de $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1/3$ e, novamente, podemos definir uma função

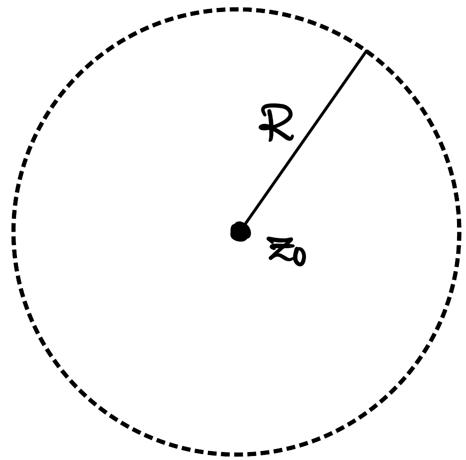
$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n z^n \quad , \quad |z| < 1/3 .$$

Para $|z| > 1/3$, o Teste da Razão diz que a série $\sum n^2 3^n z^n$ diverge e, para $|z| = 1/3$, $\sum |n^2 3^n z^n| = \sum n^2 \nearrow \infty$, portanto a série diverge.

<u>Exemplo</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Ambas as séries convergem se $|z|<1$ e

como antes, definem funções em $|z|<1$. Se $|z|>1$, ambas as séries divergem. Para $|z|=1$, a primeira série diverge se $z=1$ e converge para todo outro z (com $|z|=1$) pelo Teste de Dirichlet. A segunda série converge para todo z com $|z|=1$, já que converge absolutamente, já que é comparável (em valor absoluto) a $\sum 1/n^2$.

Até aqui, em todos os exemplos aconteceu que há um número real $R \geq 0$ ou ∞ tal que as séries convergem se $|z|<R$ e divergem se $|z|>R$. Para $|z|=R$, tudo pode acontecer...



(Em nossos exemplos, $z_0=0$, mas isso foi (e continuará sendo) irrelevante para os cálculos do <u>RAIO DE CONVERGÊNCIA</u> R.)

Teorema: Assuma que a série $\sum a_n z^n$ converge para algum $z = z_1$ com $z_1 \neq 0$. Então:

(i) $\sum a_n z^n$ converge para todo z com $|z| < |z_1|$ e

(ii) a convergência é uniforme em qualquer disco $|z| < R < |z_1|$.

Note que isso quer dizer, em particular, que podemos definir a função $z \mapsto \sum a_n z^n$ para todo $|z| < |z_1|$ e essa função é contínua, já que os termos da série $(a_n z^n)$ são todas funções contínuas.

Prova: Como $\sum a_n z_1^n$ converge, $a_n z_1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Tome $0 < R < |z_1|$ e tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n z^n| < 1$ para $n \geq N$. Assim, se $|z| \leq R$, $n \geq N$,

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_1^n| \cdot \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < \left|\frac{R}{z_1}\right|^n = t^n, \text{ onde } t = \left|\frac{R}{z_1}\right| < 1.$$

Agora segue do Teste M de Weierstrass que $\sum a_n z^n$ converge uniformemente. Isso prova (ii), mas prova também (i). $\blacksquare$

Corolário Dada uma série de potências $\sum a_n z^n$, existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que $\sum a_n z^n$:

(i) converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < R$ e

(ii) diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > R$.

Observação: O caso $R = 0$ quer dizer que a série não converge para qualquer $z \neq 0$. O caso $R = \infty$ quer dizer, no extremo oposto, que a série converge $\forall z \in \mathbb{C}$.

Prova: Se existe $z_1 \neq 0$ tal que $\sum a_n z_1^n$ converge, o teorema anterior mostrou que $\sum a_n z^n$ converge para todo z com $|z| < |z_1|$. Note que $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z_1|\}$ é um disco aberto em $\mathbb{C}$, centrado em 0 e de raio $|z_1|$. Definimos, então

$$\mathcal{R} = \{r > 0 : \sum a_n z^n \text{ converge se } |z| < r\}$$

e definimos

R e $\mathcal{R}$ são símbolos diferentes

$$R = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{R} = \emptyset, \\ \infty, & \text{se } \mathcal{R} \text{ é ilimitado}, \\ \sup \mathcal{R}, & \text{se } \mathcal{R} \text{ é limitado e não vazio.} \end{cases}$$

- Se $R=0$, a série só converge para $z=0$
- Se $R=\infty$, então $\sum a_n z_1^n$ converge para escolhas de z_1 com $|z_1|$ arbitrariamente grandes e, pelo teorema anterior, $\sum a_n z^n$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
- Se $0 < R < \infty$, então $\sum a_n z^n$ converge para todo z com $|z| < R$, pela definição de $\mathcal{R}$ e pelo teorema anterior. Por outro lado, se $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ não pode convergir, já que isso contradiz a definição de $R = \sup \mathcal{R}$. $\blacksquare$

<u>Def</u>: O número R é chamado <u>RAIO DE CONVERGÊNCIA</u> da série $\sum a_n z^n$.

<u>Teorema</u>: Seja $\sum a_n(z-z_0)^n$ uma série de potencias e suponha que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = C$$

Então o raio de convergência da série é $R = 1/C$ se $C > 0$ e é ∞ se $C = 0$.

<u>Prova</u>: O teste da raiz diz que $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente se

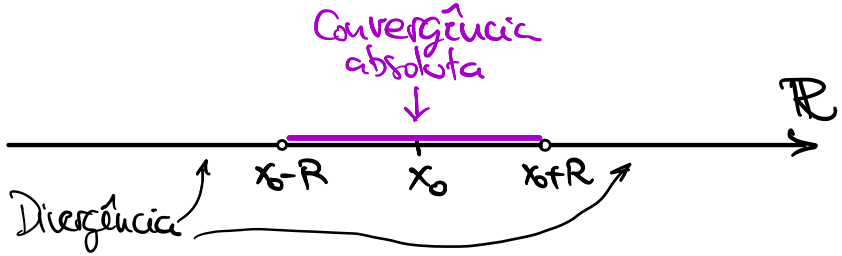
$$\lim_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n|^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right) \cdot |z-z_0| < 1$$

e diverge se esse mesmo limite é > 1, supondo que o limite exista. Mas esse é exatamente o enunciado do teorema, já que

$$C \cdot |z-z_0| < 1 \iff |z-z_0| < 1/C \,. \qquad \blacksquare$$

SÉRIES DE POTÊNCIAS REAIS

Vamos agora supor que estamos lidando com uma série de potências da forma $\sum a_n (x-x_0)^n$ onde $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o disco de convergência da série intersecta o eixo real em um intervalo centrado em x_0:



Dizemos que a função

$$x \xmapsto{f} \sum a_n(x-x_0)^n$$

definida em (x_0-r, x_0+r) é representada pela série $\sum a_n(x-x_0)^n$.

Teorema: Assuma que a função f é representada por uma série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

no intervalo (x_0-R, x_0+R). Então f é contínua neste intervalo e sua integral em qualquer subintervalo fechado pode ser obtida por integração termo-a-termo. Em particular,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^{x} (t-x_0)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}.$$

Prova: A prova é imediata do que vimos anteriormente: dentro do intervalo de convergência, a série converge absolutamente e converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado; para séries que convergem uniformemente é possível integrar termo-a-termo. ∎

Exemplo: $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

O raio de convergência é $\dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} 1^{1/n}} = 1$.

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$ com o mesmo raio de convergência.

Integrando, obtemos

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_1^{x+1} \frac{du}{u} = \ln(1+x)$$

$u = 1+t$

$du = dt$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^{n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

para $x \in (-1,1)$.

Note que nesse caso podemos, obviamente, derivar a série termo-a-termo:

$$\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n ,$$

que sabemos ser verdade.

<u>Teorema</u>: Seja f uma função representada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ no intervalo de convergência (x_0-R, x_0+R). Então:

(a) a série derivada termo-a-termo $\sum a_n n (x-x_0)^{n-1}$ tem raio de convergência R, e

(b) a derivada $f'(x)$ existe em todo o intervalo (x_0-R, x_0+R) e é representada pela série de (a).

<u>Prova</u>: Vamos assumir que $x_0 = 0$. O caso geral é análogo. Tome $x, h > 0$ tais que $x, x+h \in (0,R)$. Então, como $f(x)$ é representada pela série, temos a igualdade

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right] \qquad (*)$$

e a série à direita é convergente, já que é a soma, termo-a-termo, de duas séries convergentes. Usando o TVM, podemos escrever

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n c_n^{n-1} \quad , \quad \text{onde } c_n \in [x, x+h].$$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n c_n^{n-1}$ é convergente, já que é igual a série $(*)$, que é convergente. Note que essa não é uma série de potências (já que os $c_n \in [x, x+h]$ podem ser todos diferentes).

Mas, como $x \leq c_n \leq x+h$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c_n^{n-1}$, e os termos dessas séries são todos ≥ 0, o teorema de comparação implica que a série $\sum n a_n x^{n-1}$ converge. Como esse raciocínio pode ser feito para todo $x \in (0,R)$, isto prova (a).

Para provar (b), definimos $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Integrando ambos os lados (e usando o teorema anterior que nos permite integrar termo-a-termo), obtemos

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0$$

Como g é contínua, o TFC agora nos permite concluir que

$$f'(x) = g(x). \qquad \blacksquare$$

Agora vejamos como calcular os coeficientes de uma série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \implies f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \implies f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} \implies f''(x_0) = 2a_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \implies f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$$

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$$

SÉRIES DE TAYLOR

Se f é uma função várias vezes diferenciável, definimos o POLINÔMIO DE TAYLOR de grau n de f no ponto $\underline{a}$ por

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Se f pode ser derivada infinitamente, podemos então considerar a SÉRIE DE TAYLOR de f no ponto a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Há duas questões nesse momento: 1) a série de Taylor converge? e 2) se sim, converge para f?

Vimos no semestre passado que o "erro" ao aproximarmos uma função por seu polinômio pode ser dado da seguinte maneira: se $T_n f$ é o polinômio de Taylor de grau n e definimos

$$E_n(x) := f(x) - T_n f(x)$$

então

$$E_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Como as somas parciais da série de Taylor são exatamente os polinômios de Taylor, a série converge se e somente se $E_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$|E_n(x)| \leq \frac{\max\limits_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|}{n!} \int_a^x |x-t|^n\,dt.$$

Mas $\displaystyle\int_a^x (x-t)^n\,dt = \int_0^{x-a} u^n\,du = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}.$

$u = x-t$
$du = -dt$

Segue então que

$$\boxed{|E_n(x)| \leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|}$$

Teorema: Se $|f^{(n)}(x)| \leq A^n$ para todo $x \in (a-R, a+R)$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então a série de Taylor de f em a converge uniformemente, em qualquer intervalo fechado em $(a-R, a+R)$, para f.

Prova: $\dfrac{[(x-a)A]^n}{n!} \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$. ∎

Como consequência, temos que as séries do seno e do coseno convergem, já que todas as derivadas de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são limitadas por 1:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots$$

Além disso, a série de e^x também converge, já que $(e^x)' = e^x$ e e^x é limitada em qualquer intervalo finito:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Aqui, finalmente, terminamos de demonstrar os resultados sobre séries que assumimos ao tratar de EDO lineares no início do semestre.

Exercícios: seção 11.7, pp. 430-431: 1, 3, 4, 8, 10, 12, 13, 14, 17, 19.

seção 11.13, pp. 438-439: 2, 4, 7, 9, 11, 13, 17, 22, 23.