Lista de Exercícios — Tópicos Álgebra — Entregar dia 30/06/23

1) Seja $0 \to C'_* \to C \to C''_* \to 0$ uma sequência exata de complexos de ~~~~ A-modulos, mostre que se dois dos 3 complexos é exato então o terceira também é.

2) Seja $f : A^* \to B^*$ um morfismo de complexos de cocadeias. Para cada inteiro n seja

$C^n = A^{n+1} \oplus B^n$ defina

$$d_f^n(a^{n+1} + b^n) = (-d^{n+1}(a^{n+1}), f^{n+1}(a^{n+1}) + d^n(b^n))$$

a) mostre que $C(f) = ((C^n, d_f^n)_{n \in \mathbb{Z}})$ é um complexo. (chamado cone de f).

b) Dado um complexo D^* definimos $D^*[1]$ como sendo o complexo.

$(D^*[1])^n = D^{n+1}$ e $d(a) = (-1)^n d(a)$ onde $a \in D^n$.

mostre que existe uma auto equivalencia na categoria de complexos $D \to D[1]$.

c) Mostre que existe uma sequencia exata curtas de complexos

$$0 \to B \to C(f) \to A[1] \to 0$$

d) Conclua que $H^*(A) \xrightarrow{H^*(f)} H^*(B)$ é isomorfismo

$\Longleftrightarrow$ $C(f)$ é exato.

3º Sejam r e s num anel com mais de 1 elemento.

(associativo, com 1)

a) Assuma que $rs = 1$ mas $sr \neq 1$,

prove que sr não inverso à esquerda ou à direita.

prove que o mesmo vale para $1 - sr$.

b) Prove que se um anel R tem um único ideal à esquerda maximal então esse ideal é bilateral e também é o único ideal à direita maximal além disso consiste dos elementos não invertíveis de R.

4) Seja Dom a categoria cujos objetos são os domínios de integridade (comutativos) e os morfismos os homomorfismos de aneis com unidade.

a) Mostre que para cada domínio de int. A existe um único corpo $Q(A)$ e um monomorfismo $a \to a/1$ tal que

$f: A \to F$ é monomorfismo e F é corpo.

existe um único $\tilde{f}: Q(A) \to F$ tal que $\tilde{f}(a/1) = f(a), a \in A$

2) $Q(A) = A \Longleftrightarrow A$ é corpo

3) $\mathcal{F}: \text{Dom} \to \text{corpos}$ $A \to Q(A)$ é um funtor

4) $\mathcal{F}$ tem adjunto à esquerda.

5) a) Seja ${}_A P$ um A-módulo projetivo e

a) B uma k-algebra e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de k-algebras.

mostre que podemos usar φ para definir em B uma estrutura de A-bimódulo.

mostre que $B \otimes_A P$ é B-projetivo.

b) Seja $\varphi : A \to B$ um hom de k-Algebras

defina o funtor (restrição dos escalares)

~~F: modB~~

$F : B\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$

$F(M) = M$ como grupo abeliano (como k-módulos)

$a * m = f(a)\, m$.

mostre que

$\mathrm{Hom}_B({}_B B_A, -) \cong F \cong {}_A B_B \otimes -$

e que

$F \circ ({}_B B_A \otimes -) \cong F \circ \mathrm{Hom}_A({}_B B_A, -) \cong \mathrm{Id}\, \mathrm{Mod}_A$

6) Seja k um corpo e A uma algebra de dimensão finita. Seja $0 \to X \to X \oplus Y \to Y \to 0$ uma sequência exata em A-mod, mostre que a sequencia cinde

7) Seja A uma algebra comutativa, indecomponivel de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$.

$(A \cong A_1 \times A_2 \Rightarrow A_1 = 0$ ou $A_2 = 0)$

a) Mostre que os unicos idempotentes de A são 0 e 1.

b) Mostre que se A é alg comutativa e os únicos idempotentes são 0 e 1 então A é indecomponivel.

c) Mostre que se A é comutativo indecomponivel sobre $\mathbb{C}$ e A tem dimensão finita. Então o conjunto dos elementos não invertiveis de A forma um ideal I e além do mais I é o unico ideal maximal.

d) Mostre que no caso c J é um ideal idempotente.

e) Mostre que no caso c se J é gerado por um único elemento então $A \cong \frac{\mathbb{C}[x]}{x^n}$ para algum n.

d) Mostre que se ~~A~~ é $\mathbb{C}$-algebra comutativa indecomponível então podemos ter $A \cong \frac{\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]}{I}$ onde $(x_1, \ldots, x_n)^t \subset I \subset (x_1, \ldots, x_n)^2$