Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 16
Prof. Pedro L. Fagundes

Exercícios

Exercícios

49) Mostre que se $A \in M_n(R)$ é diagonalizável, então A^n é diagonalizável para todo natural $n \geq 1$.

Sol. Se A é diagonalizável, então existe uma matriz M tal que

$$M^{-1}AM = D$$

sendo D uma matriz diagonal.

$$M^{-1}AM = D \Leftrightarrow A = MDM^{-1}$$

Assim

$A^n = MD^nM^{-1} \Leftrightarrow M^{-1}A^nM = D^n$ que é diagonal.

Exercícios

50) Exiba uma matriz A não diagonalizável, tal que A^2 seja diagonalizável.

Sol.

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_A(t) = det\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$ **que não possui raiz real, logo A não é diagonalizável.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que é uma matriz diagonal, portanto, diagonalizável.

Exercícios

51) Mostre que o operador linear $T: C(R) \to C(R)$ definido por:

$$T(f)(x) = \int_0^x f(s)ds\,, x \in R$$

não tem autovalores.

Sol.

Suponha que α seja um autovalor de T, então existe uma função contínua e não nula g, tal que $T(g) = \alpha g$

Exercícios

Ou seja

$$T(g)(x) = \int_0^x g(s)ds = \alpha g(x), x \in R$$

Derivando em ambos os lados obtemos:

$$g(x) = \alpha g'(x), x \in R$$

Como g não é a função nula, devemos ter $\alpha \neq 0$ e assim,

$$g'(x) = \frac{1}{\alpha} g(x) \Rightarrow g(x) = e^{\frac{1}{\alpha}x}$$

Vamos verificar se g é realmente um autovetor.

Exercícios

$$T(g)(x) = \int_0^x g(s)ds = \int_0^x e^{\frac{1}{\alpha}s}\,ds =$$

$$= \alpha e^{\frac{1}{\alpha}s}\Big|_0^x = \alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}x} - 1\right) =$$

$$= \alpha(g(x) - 1) \neq \alpha g(x)$$

Logo não existe autovalor para este operador linear.

Exercícios

52) Seja β uma autovalor de um operador linear T.

a) Mostre que β^n é autovalor de T^n

b) Se $f(t)$ é um polinômio qualquer, mostre que $f(\beta)$ é um autovalor de $f(T)$

Sol.

Seja v um autovetor associado a β, assim $T(v) = \beta v$.

a) $T^n(v) = T^{n-1}\big(T(v)\big) = T^{n-1}(\beta v) = \beta T^{n-1}(v) =$

$= \beta T^{n-2}\big(T(v)\big) = \beta T^{n-2}(\beta v) = \beta^2 T^{n-2}(v) = \cdots =$

$= \beta^{n-1} T(v) = \beta^n v$.

Exercícios

b) Seja $f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, assim

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I$$

Vamos calcular o operador $f(T)$ no autovetor v.

$$f(T)(v) = \left(a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \cdots + a_1 T + a_0 I\right)(v) =$$

$$= (a_n T^n)(v) + \left(a_{n-1} T^{n-1}\right)(v) + \cdots + (a_1 T)(v) + (a_0 I)(v) =$$

$$= a_n T^n(v) + a_{n-1} T^{n-1}(v) + \cdots + a_1 T(v) + a_0 I(v) =$$

$$= a_n \beta^n v + a_{n-1} \beta^{n-1} v + \cdots + a_1 \beta v + a_0 v =$$

$$= \left(a_n \beta^n + a_{n-1} \beta^{n-1} + \cdots + a_1 \beta + a_0\right).v =$$

$$= f(\beta).v$$

Exercícios

10 P-2013) Acerca de um operador linear com polinômio característico $p_T(t) = -t(t^2-1)(t^2-4)$ é correto afirmar que:

a) $p_{T^2}(t) = (p_T(t))^2$

b) T^2 **tem 5 autovalores distintos e é diagonalizável.**

c) T **é invertível e** $p_{T^{-1}}(t) = -t(t^2-1)(t^2-\frac{1}{4})$.

d) $T^2 - 4I$ **tem 4 autovalores distintos e não é diagonalizável.**

e) $T^3 - T$ **é diagonalizável e** $P_{T^3-T}(t) = -t^3(t-6)(t+6)$.

Exercícios

$p_T(t) = -t(t^2 - 1)(t^2 - 4)$, logo os autovalores de T são $0, \pm 1 \ e \ \pm 2$.

Como zero é autovalor T não é invertível e c) é falsa.

Os autovalores de T^2 são $0, 1 \ e \ 4$, logo b) é falsa.

Os autovalores de $T^2 - 4I$ são $0, -3 \ e \ -4$, logo d) é falso

Os autovalores de $T^3 - T$ são $0, 0, 0, 6, -6$, assim temos que $P_{T^3 - T}(t) = -t^3(t-6)(t+6)$. Logo e) é verdadeira.

Exercícios

57) Seja T um operador linear de R^3 tal que, todo vetor não nulo de R^3 é um autovetor de T.

Escreva $T(e_i) = \alpha_i e_i, i = 1, 2, 3$ em que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica de R^3

i) Calcule $T(e_1 + e_2 + e_3)$

ii) Mostre que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$

iii) Mostre que existe $\alpha \in R$ tal que $p_T(t) = -(t - \alpha)^3$

iv) Conclua que $T = \alpha I$; I é operador identidade de R^3

Exercícios

i) $T(e_1 + e_2 + e_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

ii) Como $e_1 + e_2 + e_3$ é um vetor não nulo de R^3 ele é um autovetor de T, logo existe um número real α tal que $\mathrm{T}(e_1 + e_2 + e_3) = \alpha(e_1 + e_2 + e_3)$, mas por i) temos que $T(e_1 + e_2 + e_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, logo

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \alpha e_1 + \alpha e_2 + \alpha e_3$$

sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ L.I. temos que:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

Exercícios

iii) De ii) temos que

$$T(e_1) = \alpha e_1, T(e_2) = \alpha e_2, T(e_3) = \alpha e_3$$

logo

$$[T]_{Can} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Assim

$$p_T(t) = det\begin{pmatrix} \alpha - t & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - t & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - t \end{pmatrix} = (\alpha - t)^3 = -(t - \alpha)^3$$

Exercícios

iv) De iii) temos que

$$[T]_{Can} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha . I_3$$

Logo $T(u) = \alpha . I(u) = \alpha u$**.**

Assim

$$T = \alpha . I$$

Exercícios

61) Verifique que as matrizes abaixo são semelhantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol. Seja $T: R^4 \to R^4$ **dada por** $T(u) = A.u$

$$T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ 2(x+y+z+w) \\ 3(x+y+z+w) \\ 4(x+y+z+w) \end{pmatrix} =$$

Exercícios

$$= (x + y + z + w)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dessa forma

$$T(1,2,3,4) = (1 + 2 + 3 + 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 10.(1,2,3,4)$$

Logo 10 é um autovalor de A associado ao autovetor $(1,2,3,4)$ de R^4.

Exercícios

Vamos calcular $V(0)$

$$V(0) = KerT$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2(x + y + z + w) = 0 \\ 3(x + y + z + w) = 0 \\ 4(x + y + z + w) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y + z + w = 0 \Rightarrow w = -(x + y + z)$$

$$V(0) = \{(x, y, z, -(x + y + z)\} =$$

$$= [(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)]$$

Exercícios

Seja $F = \{(1,2,3,4),(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Logo A e B são semelhantes

Uma matriz de semelhança $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercícios

80) Sejam $a, b, c \in R$ e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de R^3. Seja T um operador de R^3 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Se $Ker(T) = [e_1 + e_2 + e_3]$, o polinômio característico de T é $p(t) = -t(t-2)^2$ e T é diagonalizável, então o valor de $a^2 - b^2 + c^2$ é:

Exercícios

Como T é diagonlizável, $dimV(2) = 2$, logo

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ a & b & c-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \\ ax + by + (c-2)z = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação, $y = -x$

Substituindo na 3ª equação, $ax - bx + (c-2)z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (c-2)z = (b-a)x$$

Se $c \neq 2$ $dimV(2) = 1$, logo $c = 2$

Exercícios

Neste caso a 3ª equação se reduz a:

$$\boldsymbol{ax - bx = 0 \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow (a - b)x = 0}$$

Se $x = 0$, temos $y = 0$ e z qualquer, novamente teremos $dimV(2) = 1$, assim $a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Logo

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 + c^2 = 2^2 = 4}$$

Alternativa d).

Exercícios

81) Considere as afirmações:

I) Se $dimU = 75$, então existe um operador T de U tal que $Ker(T-I) \cap Ker(T-2I) \cap Ker(T-3I) \neq \{\vec{0}\}$

Falso, pois um autovetor não pode estar associado a dois autovalores distintos.

Exercícios

II) Se R^4 está munido de seu produto interno usual, U é um subespaço de R^4 com $dimU = 1$ e o operador T de R^4 é dado por $\mathrm{T}(v) = proj_U v$, então existe uma base B de R^4 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Falso, se $v \in U$, então $T(v) = v$, logo 1 seria autovalor de T e deveria aparecer em $[T]_B$, pois ela é diagonal.

Exercícios

III) Se $T: R^6 \to R^6$ é um operador cujo polinômio característico é $p(t) = (t-2)^4(t+3)^2$, então T é invertível.

Verdadeiro, pois 0 não é autovalor de T.

Alternativa c).

Álgebra Linear para Engenharia II
Aula 16
Prof. Pedro L. Fagundes

Exercícios