



# PEF3200 – Introdução à Mecânica das Estruturas

Aula 10 - 07/06/2023

Treliças.

Prof. Martin Paul Schwark

Prof. Osvaldo Shigueru Nakao

Prof. Valério S. Almeida

# O que vimos nas aulas 1 a 9:

- Como é a disciplina, materiais de apoio, programação
- Mecânica dos sólidos deformáveis, o que são estruturas, estão em tudo, modelos físicos e matemáticos, classificações das estruturas, ações que atuam sobre elas e alguns tópicos da mecânica
- Deformadas, movimentos em sistemas materiais, vínculos, estaticidade, estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas, grau de hiperestaticidade, as simplificações adotadas nesta disciplina
- Cálculo de reações de apoio, tensões, esforços solicitantes, o Teorema Fundamental da Resistência dos Materiais
- Diagramas de esforços solicitantes em estruturas planas e espaciais
- Linha de Influência
- Treliças: conceito, classificação, método do equilíbrio dos nós e o conceito do método de Ritter

# O que vamos ver nesta aula:

- Treliças: Método de Ritter, exemplos



# Método de Ritter

- Vamos considerar como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio
- Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas
- Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte (“corte de Ritter”) que explicita três incógnitas, que podem ser obtidas através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte

Para partes da estrutura:

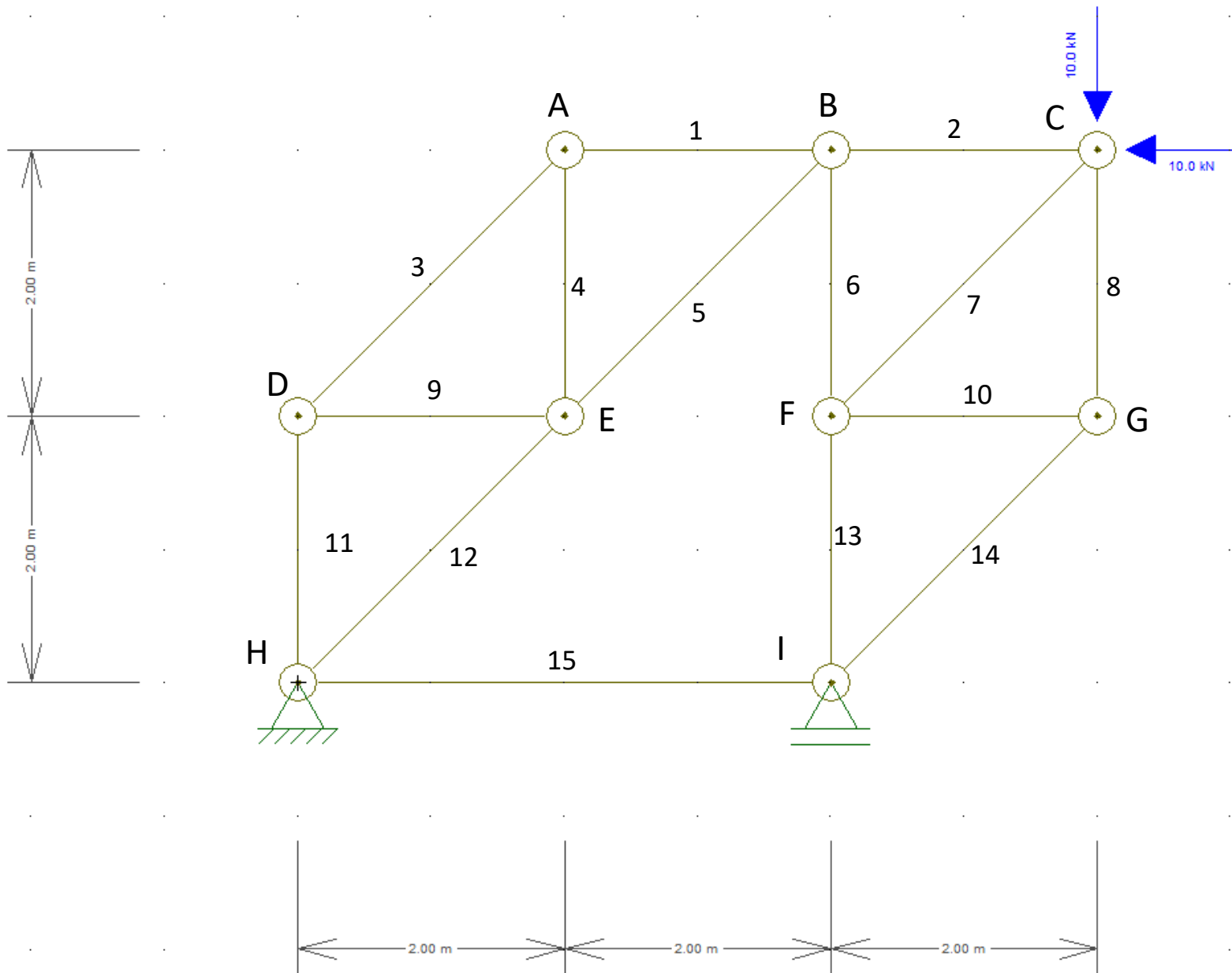
$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_o = 0 \end{array} \right.$$

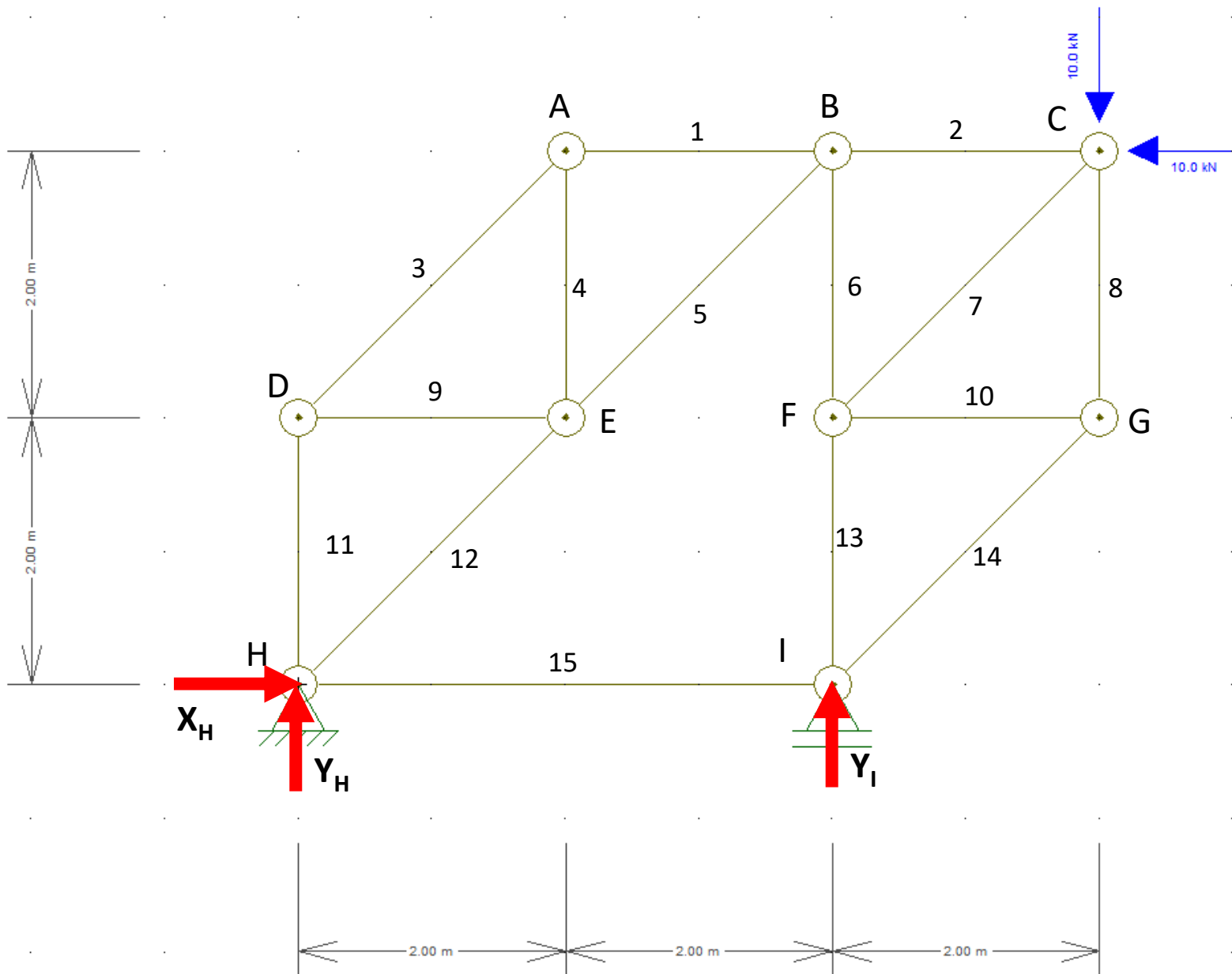
# Método de Ritter + nós

- É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravessasse três barras
  - Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, através do equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas
  - Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, através do equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

# Exemplo

Calcule os esforços nas barras 1, 5 e 15 da treliça ilustrada.





## Reações de apoio

$$\Sigma F_x = 0$$

$$X_H - 10 = 0$$

$$X_H = 10 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_H = 0$$

$$Y_I * 4 + 10 * 4 - 10 * 6 = 0$$

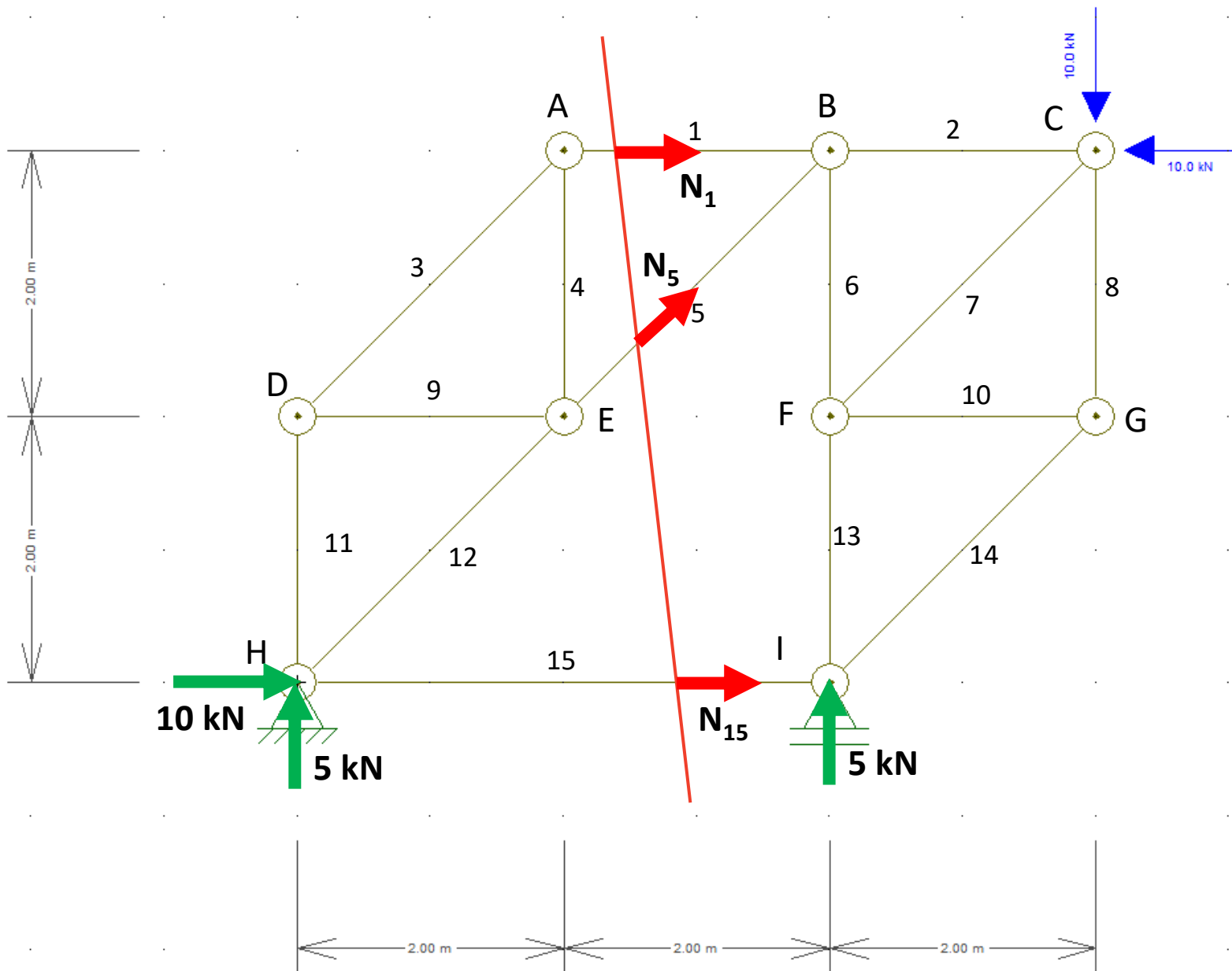
$$Y_I = 5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Y_H - 10 + Y_I = 0$$

$$Y_H - 10 + 5 = 0$$

$$Y_H = 5 \text{ kN}$$



## Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$$\sum F_y = 0$$

$$N_5 \cdot \text{sen}45 + 5 = 0$$

$$N_5 = -7,1 \text{ kN}$$

$$\sum M_H = 0$$

$$-N_1 \cdot 4 = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_1 + N_5 \cdot \text{cos}45 + N_{15} + 10 = 0$$

$$0 - 7,1 \cdot \text{cos}45 + N_{15} + 10 = 0$$

$$N_{15} = -5 \text{ kN}$$

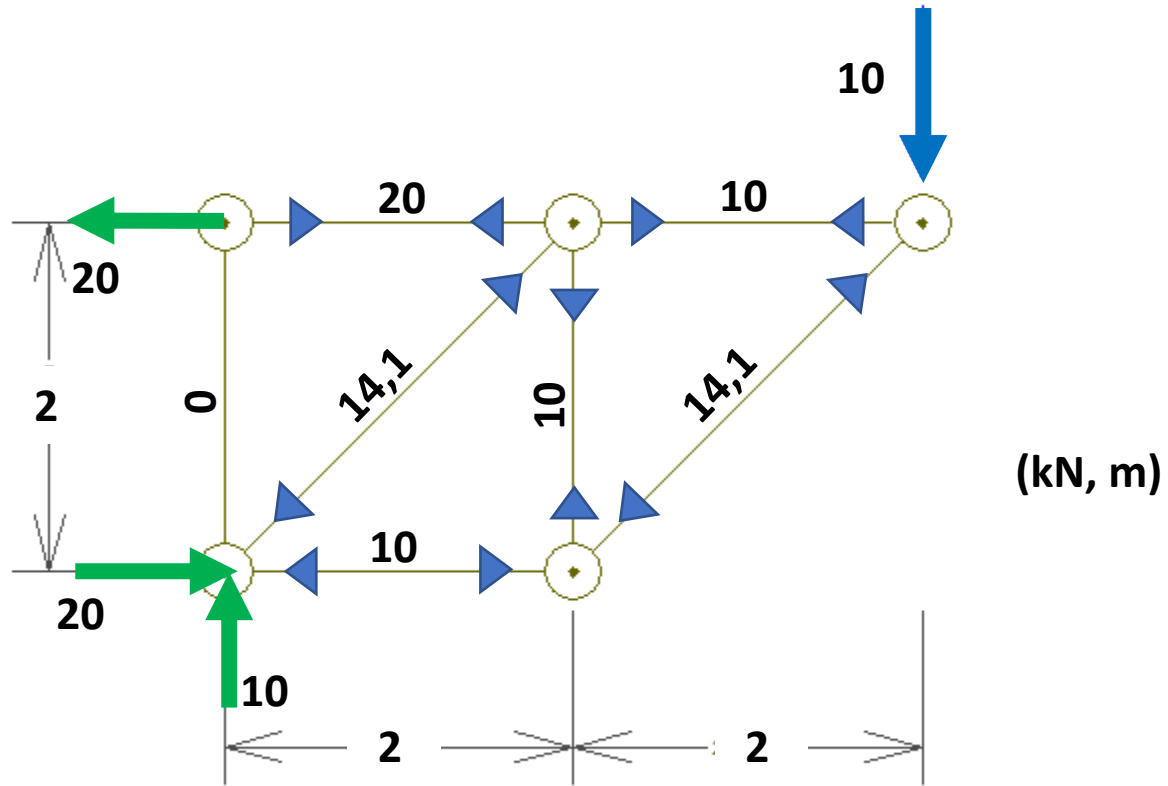


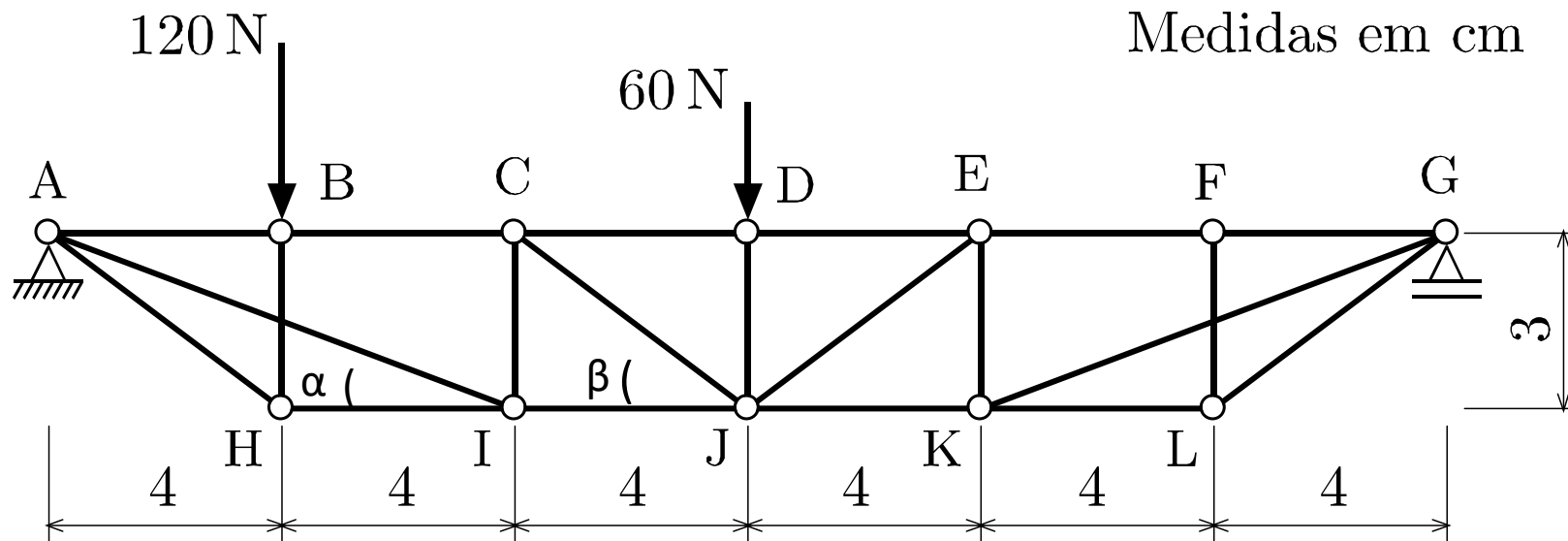
# Representação de resultados

- Existem diversas formas de representar os resultados da resolução de treliças, gráficas ou tabeladas
- Quando tabeladas, deve-se respeitar a convenção de sinal (N positivo = tração)
- Uma forma de representação que auxilia no entendimento intuitivo, na verificação visual e até na resolução, é a que segue:
  - Desenhe a treliça respeitando as proporções, como corpo livre, indicando apenas seus nós, barras e cotas
  - Indique ao lado da figura as unidades de força e distância consideradas
  - Indique as forças externas ativas e reativas nos nós onde ocorrerem, com seu sentido físico e valor
  - Nas duas extremidades de cada barra, junto aos nós, indique pontas de setas que mostrem o sentido físico da força aplicada no nó (atenção: é comum ocorrer confusão neste ponto, pois o esforço no nó é inverso ao esforço na barra)
  - Junto à barra, indique o valor que corresponde à força normal com que está solicitada
  - Desta forma, é rápido e intuitivo ver e verificar o equilíbrio nó por nó
- Em casos simples, é possível acelerar a resolução do equilíbrio dos nós de forma segura através desta representação gráfica, com contas rápidas, apoiadas pelo entendimento físico dos sentidos e projeções das forças

# Exemplo

Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.



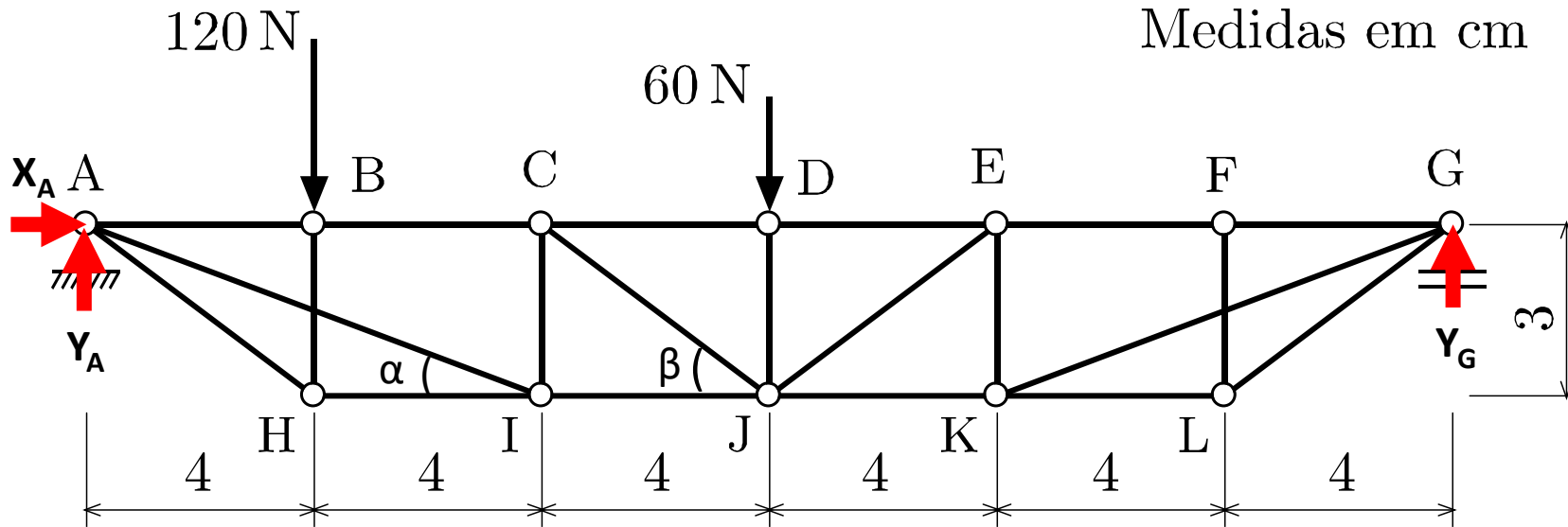


## Exemplo (P2 2019)

### 3ª Questão (3,0)

Na treliça plana da figura, o carregamento é formado por duas forças verticais aplicadas em B e D. Adotando  $\text{sen}\alpha = 0,4$ ;  $\text{cos}\alpha = 0,9$ ;  $\text{sen}\beta = 0,6$ ;  $\text{cos}\beta = 0,8$ , determine a reação no apoio A e as forças normais nas barras AI e HI.

# Reações em A



$$\Sigma F_x = 0$$

$$X_A = 0$$

$$\Sigma M_G = 0$$

$$-Y_A * 24 + 120 * 20 + 60 * 12 = 0$$

$$Y_A = 130 \text{ N}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

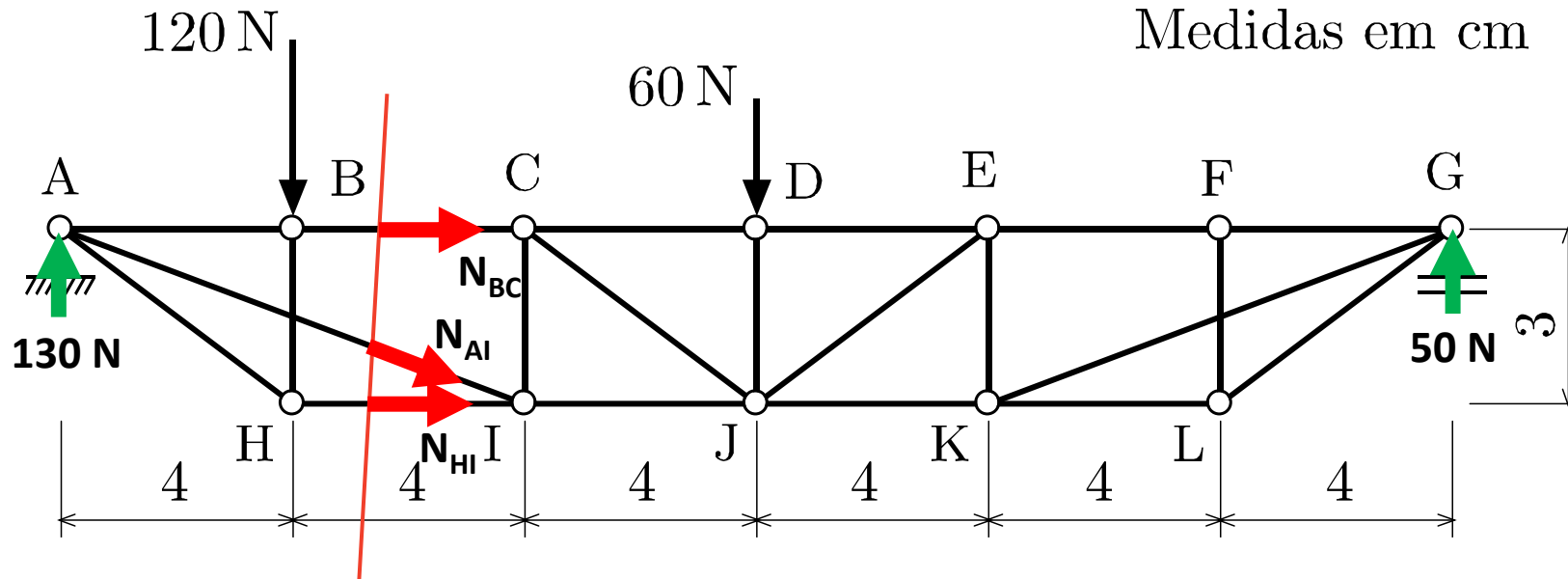
$$Y_G + Y_A - 120 - 60 = 0$$

$$Y_G + 130 - 120 - 60 = 0$$

$$Y_G = 50 \text{ N}$$

# Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$130 - 120 - N_{AI} \cdot \text{sen}\alpha = 0$$

$$10 - N_{AI} \cdot 0,4 = 0$$

$$N_{AI} = 25 \text{ N}$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$N_{HI} \cdot 3 - 120 \cdot 4 = 0$$

$$N_{HI} = 160 \text{ N}$$

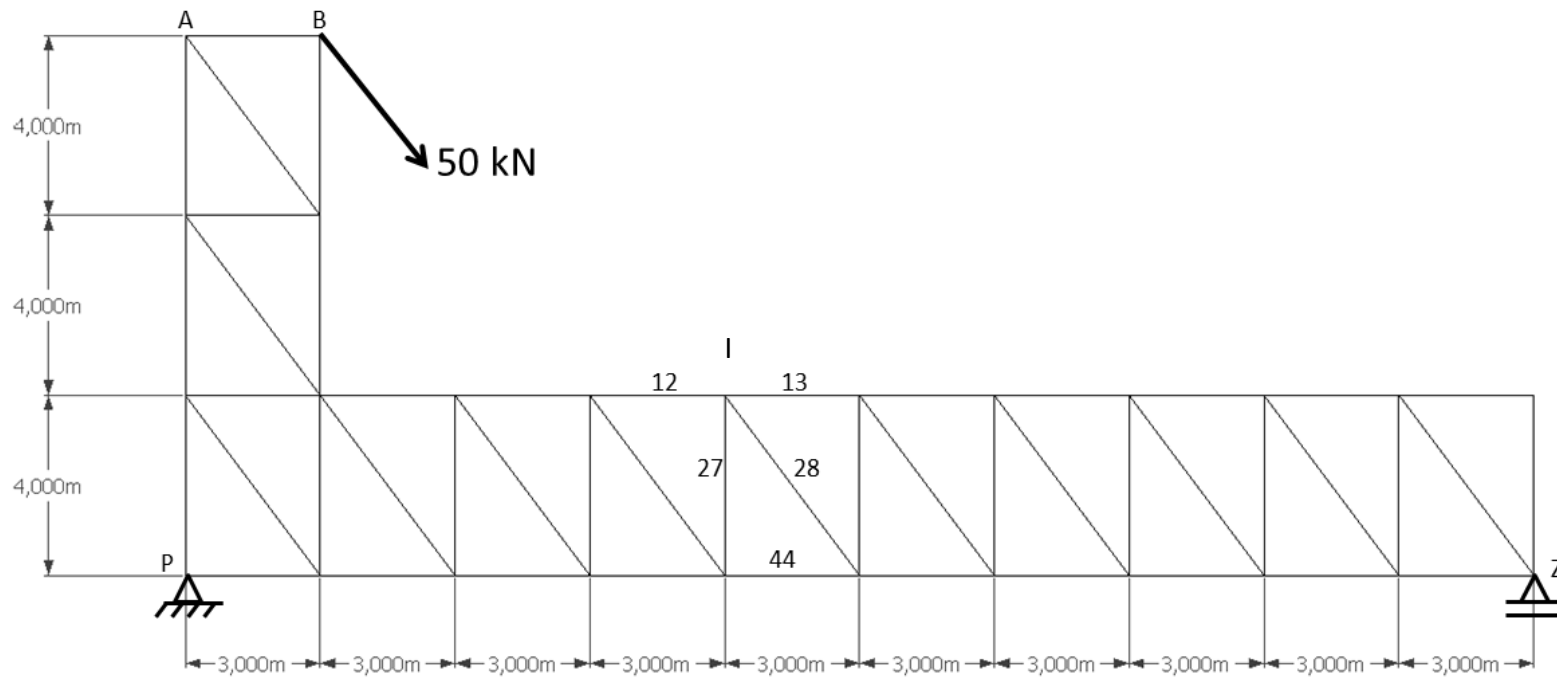
$$\Sigma F_x = 0$$

$$N_{BC} + N_{AI} \cdot \text{cos}\alpha + N_{HI} = 0$$

$$N_{BC} + 25 \cdot 0,9 + 160 = 0$$

$$N_{BC} = -182,5 \text{ kN}$$

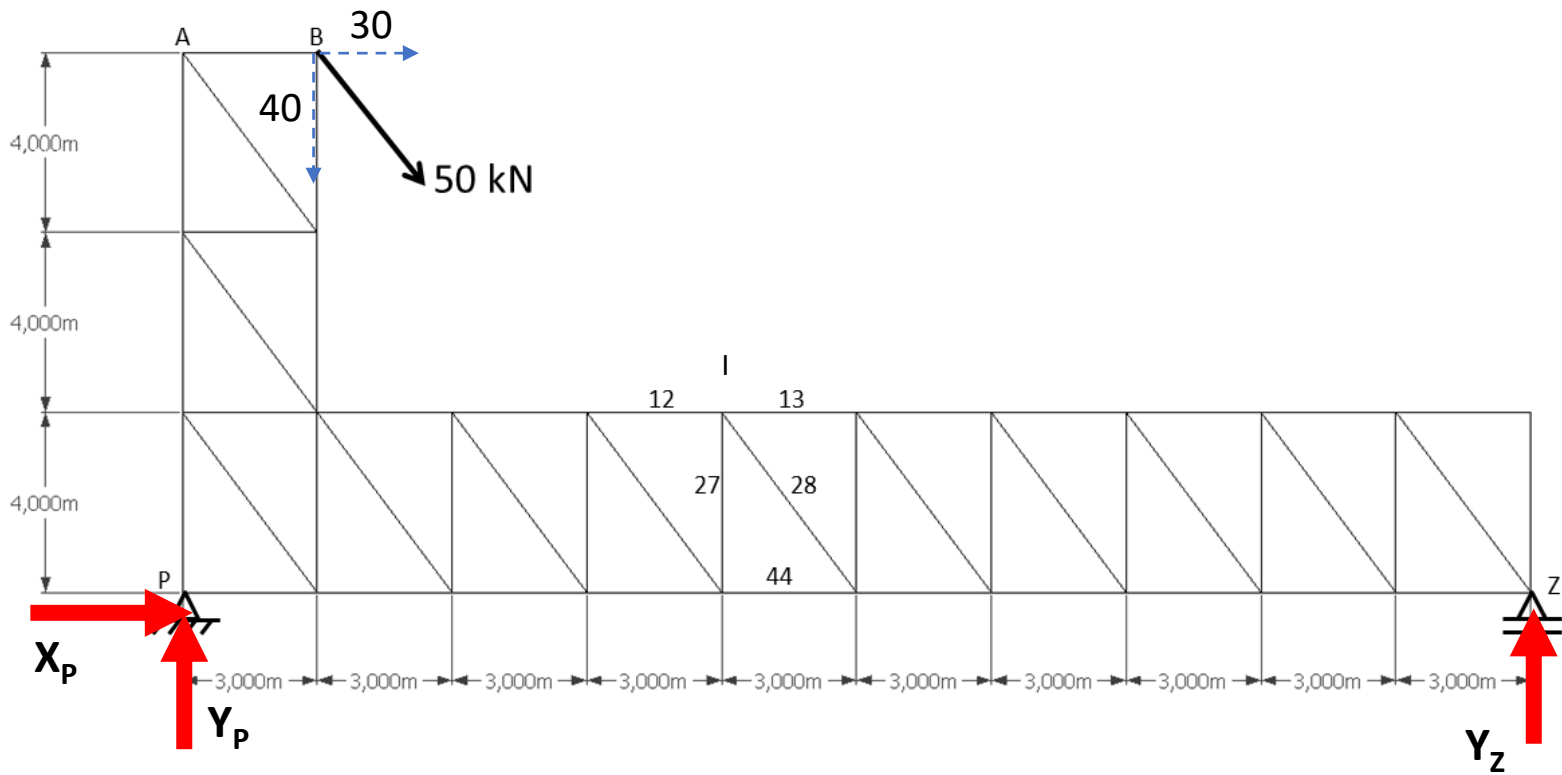
# Exemplo



# Exemplo (P2 2011)

## 2ª Questão (3,0 pontos)

Para a treliça da figura, calcule as forças normais nas barras 12, 13, 27, 28 e 44. A força de 50kN ilustrada está aplicada no ponto B e é paralela à barra 28.



### Reações de apoio

$$\Sigma M_p = 0$$

$$Y_z * 30 - 30 * 12 - 40 * 3 = 0$$

$$Y_z = 16 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Y_p - 40 + Y_z = 0$$

$$Y_p - 40 + 16 = 0$$

$$Y_p = 24 \text{ kN}$$

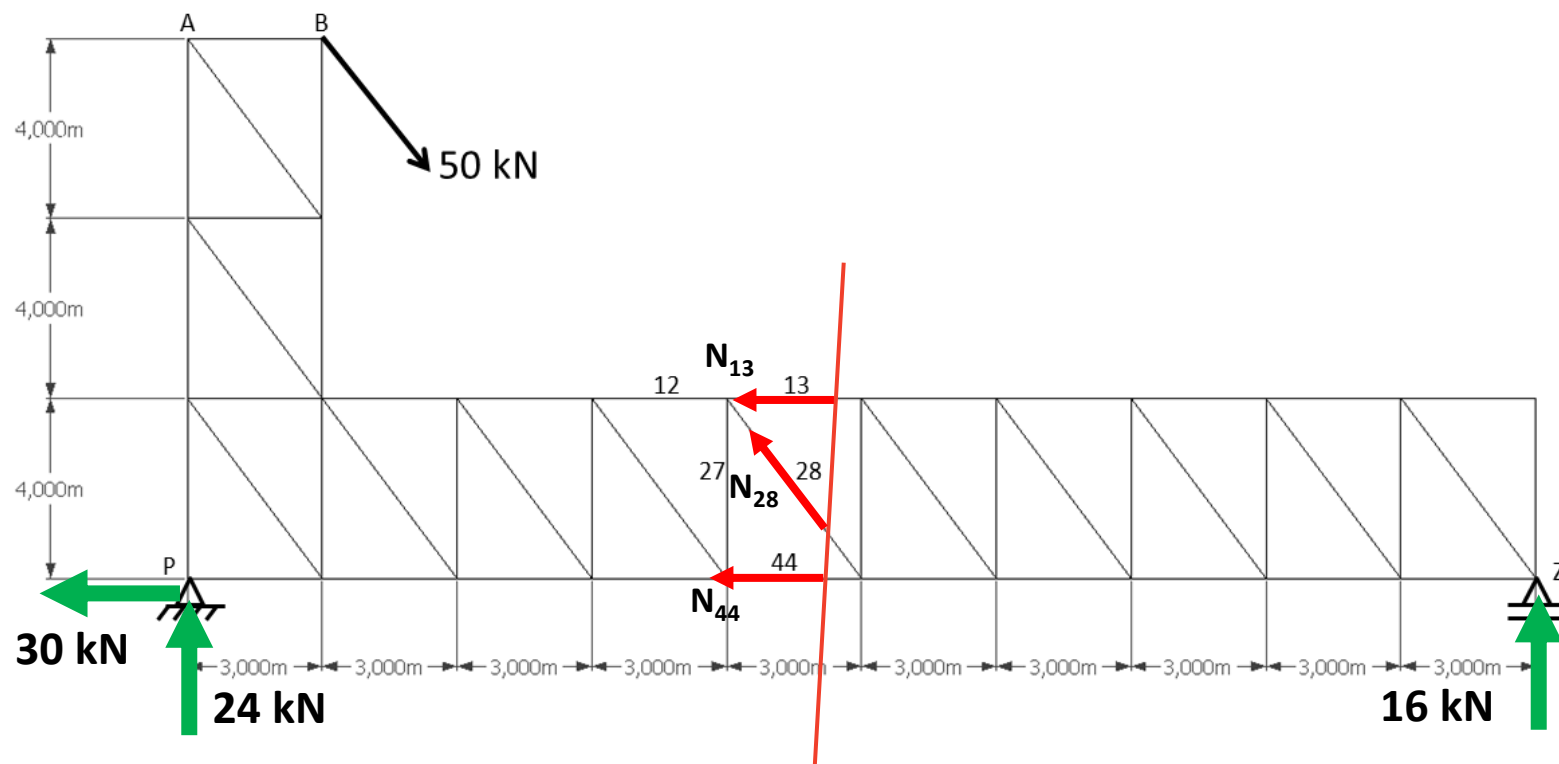
$$\Sigma F_x = 0$$

$$X_p + 30 = 0$$

$$X_p = - 30 \text{ kN}$$

# Corte de Ritter

Equilíbrio da parte direita da treliça:



$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_{28} * \text{sen}\alpha + 16 = 0$$

$$N_{28} * 4/5 + 16 = 0$$

$$\mathbf{N_{28} = - 20 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_I = 0$$

$$- N_{44} * 4 + 16 * 18 = 0$$

$$\mathbf{N_{44} = 72 \text{ kN}}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

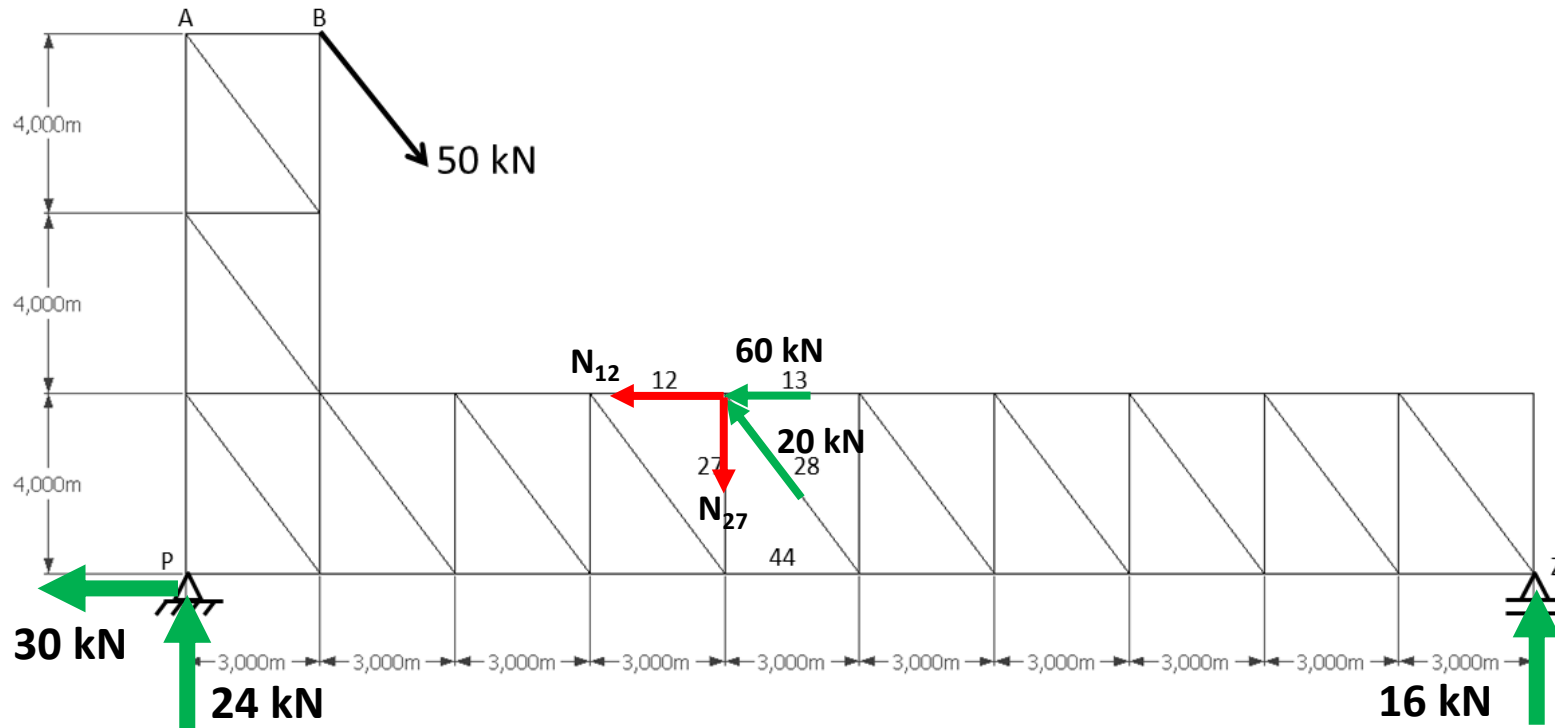
$$- N_{13} - N_{28} * \text{cos}\alpha - N_{44} = 0$$

$$- N_{13} + 20 * 3/5 - 72 = 0$$

$$\mathbf{N_{13} = - 60 \text{ kN}}$$



# Equilíbrio do nó I



$$\Sigma F_y = 0$$

$$- N_{27} + 20 * \text{sen}\alpha = 0$$

$$- N_{27} + 20 * 4/5 = 0$$

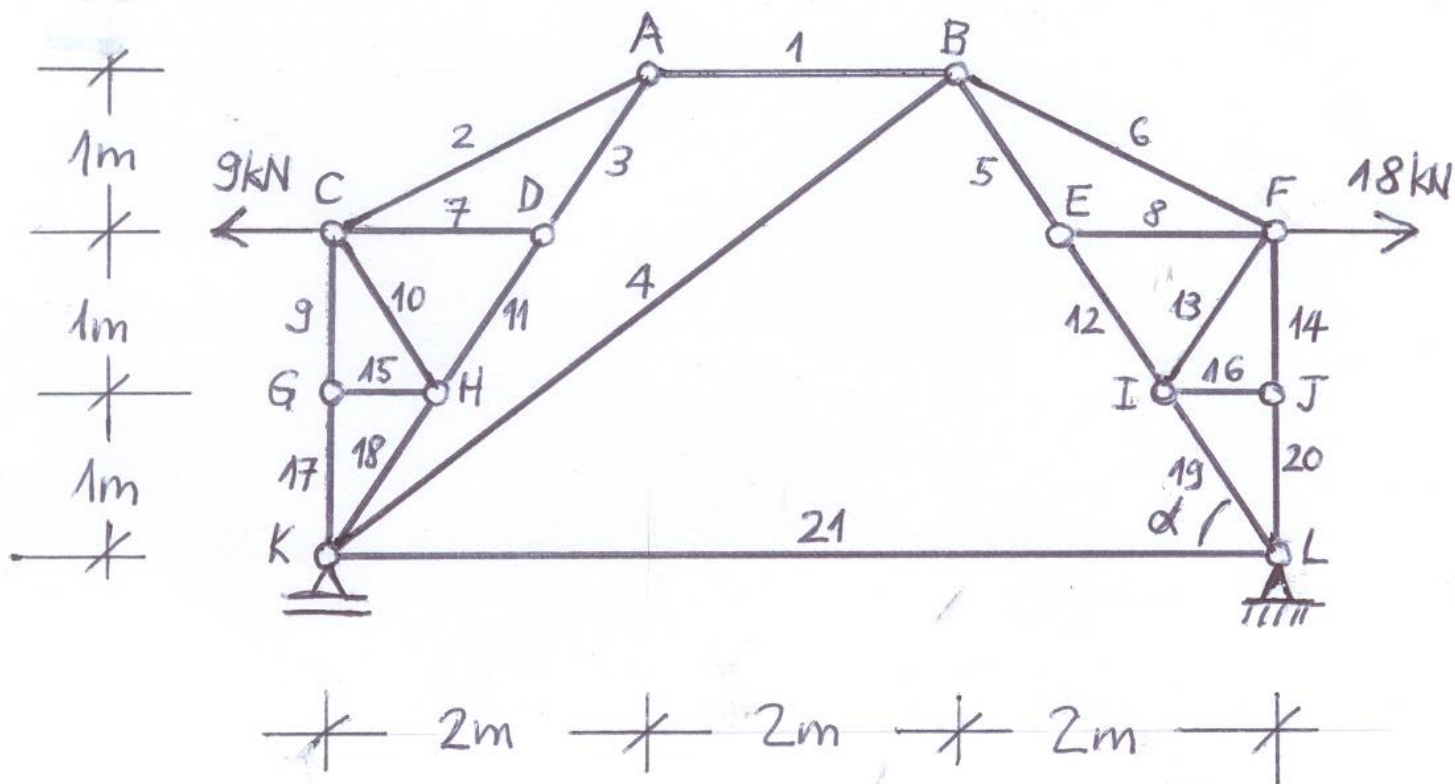
$$N_{27} = 16 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$- N_{12} - 20 * \text{cos}\alpha - 60 = 0$$

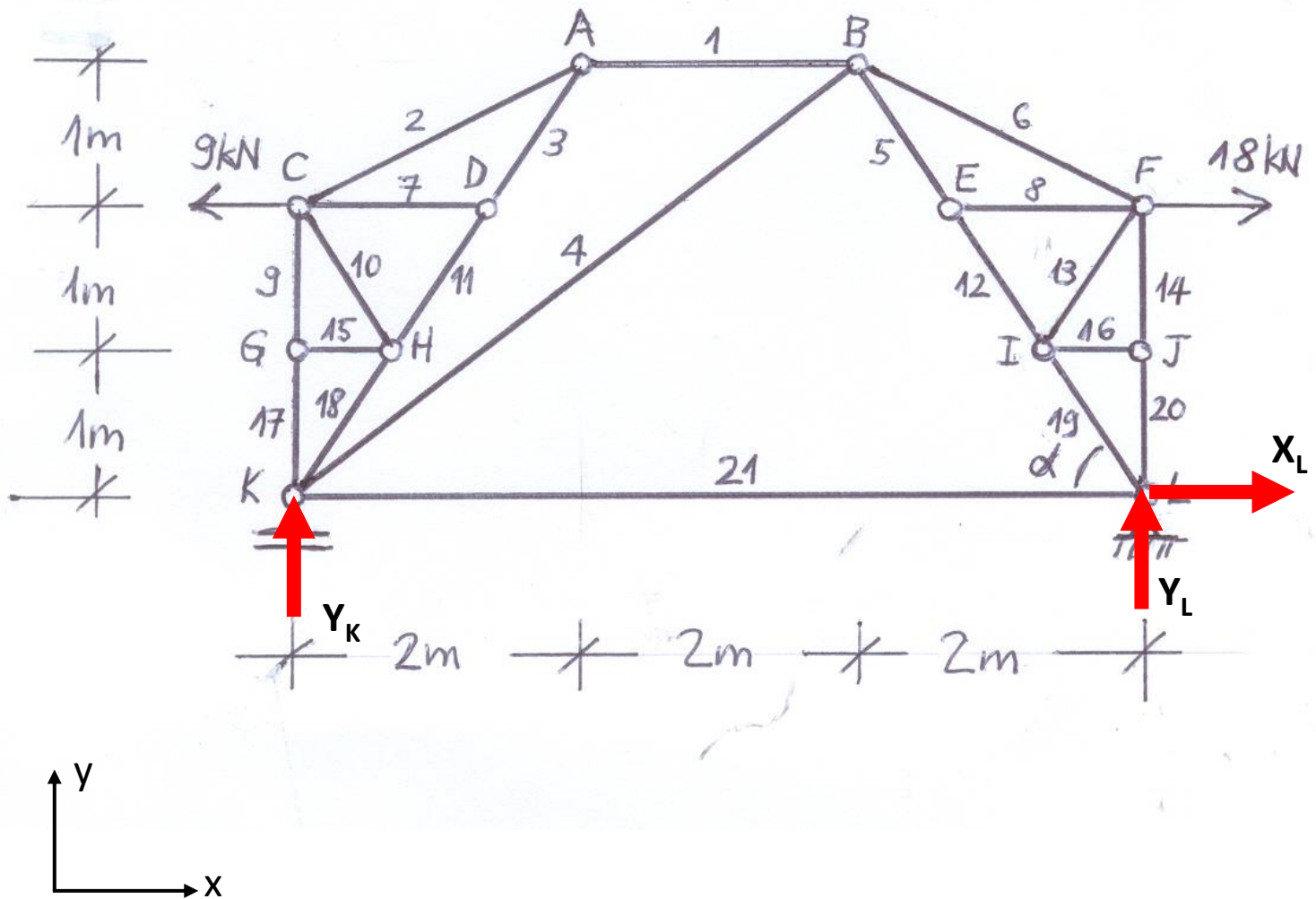
$$- N_{12} - 20 * 3/5 - 60 = 0$$

$$N_{12} = - 72 \text{ kN}$$



## Exemplo (P2 2006)

**Questão 3 (3,0)** Calcule os esforços nas barras 1, 19, 20 e 21 da treliça ilustrada. Dados:  $\alpha = 56,31^\circ$ ,  $\cos\alpha = 0,555$ ;  $\sin\alpha = 0,832$



## Reações de apoio

$$\Sigma F_x = 0$$

$$X_L + 18 - 9 = 0$$

$$X_L = -9 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_K = 0$$

$$Y_L * 6 + 9 * 2 - 18 * 2 = 0$$

$$Y_L = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$Y_K + Y_L = 0$$

$$Y_K + 3 = 0$$

$$Y_K = -3 \text{ kN}$$

# Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$$\sum F_y = 0$$

$$N_4 * \frac{3}{5} - 3 = 0$$

$$N_4 = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_K = 0$$

$$-N_1 * 3 + 9 * 2 = 0$$

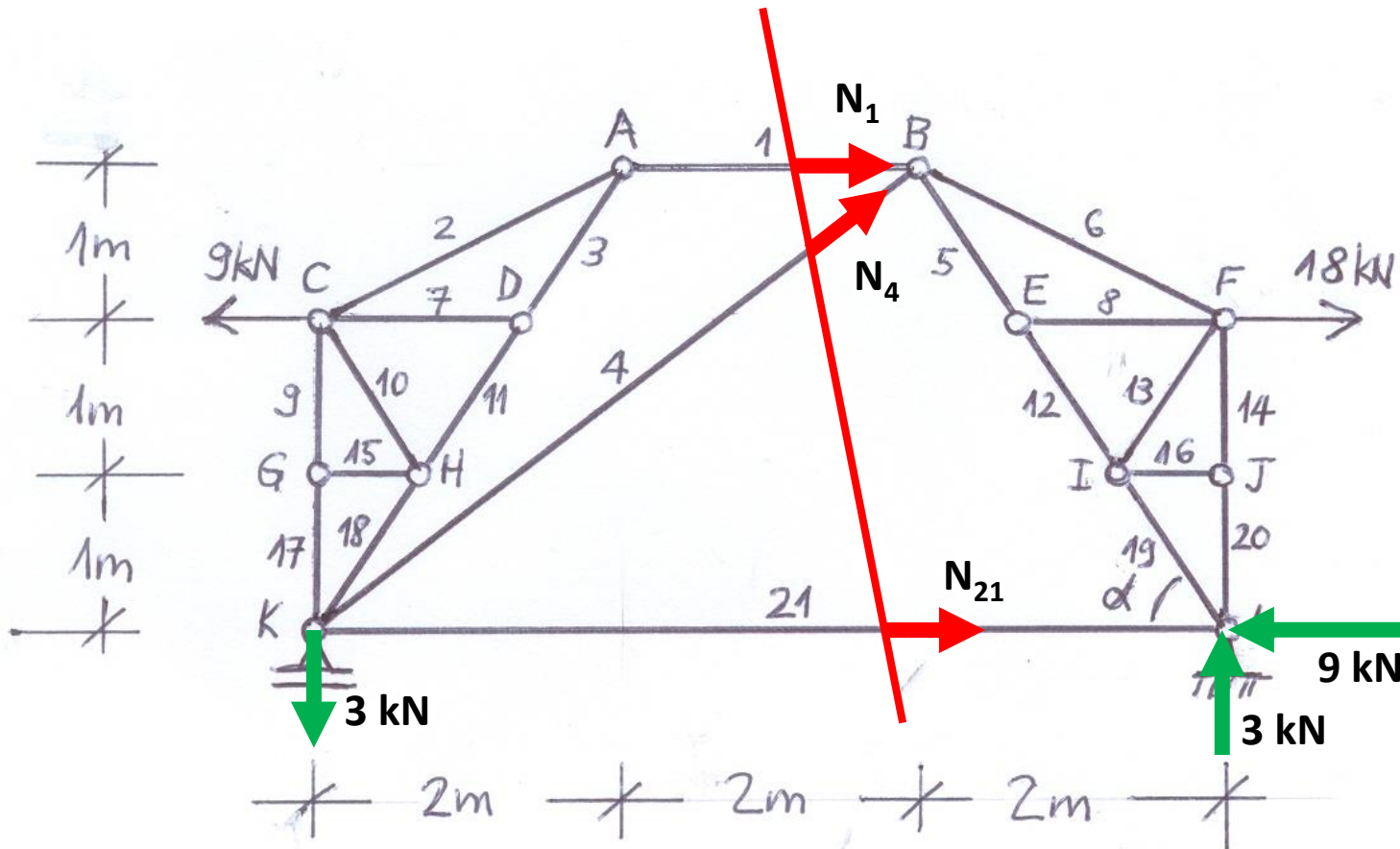
$$N_1 = 6 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

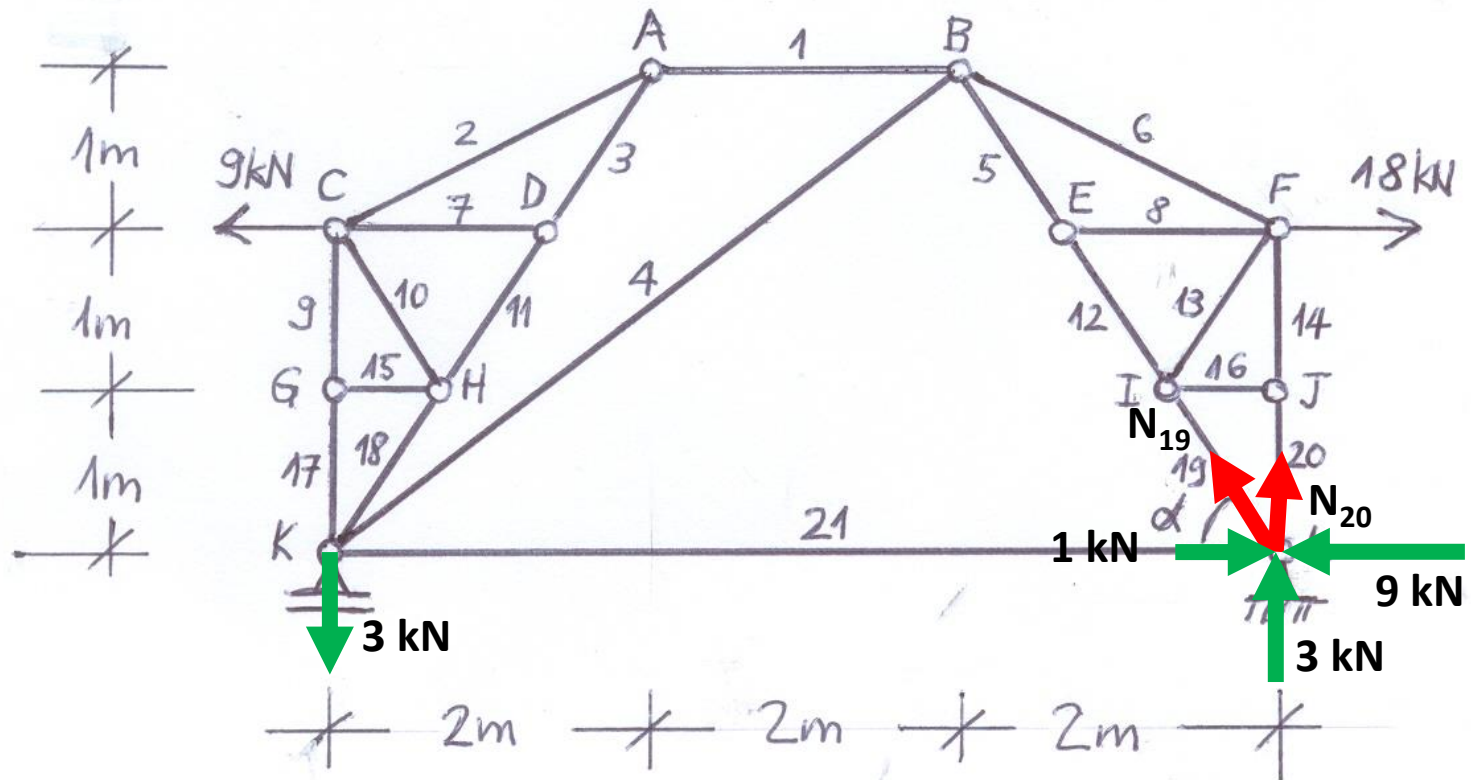
$$-9 + N_1 + N_4 * \frac{4}{5} + N_{21} = 0$$

$$-9 + 6 + 5 * \frac{4}{5} + N_{21} = 0$$

$$N_{21} = -1 \text{ kN}$$



## Equilíbrio do nó L



$$\Sigma F_x = 0$$

$$- N_{19} \cdot \cos\alpha + 1 - 9 = 0$$

$$- N_{19} \cdot 0,555 - 8 = 0$$

$$N_{19} = -14,4 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$3 + N_{19} \cdot \sin\alpha + N_{20} = 0$$

$$3 - 14,4 \cdot 0,832 + N_{20} = 0$$

$$N_{21} = 9 \text{ kN}$$

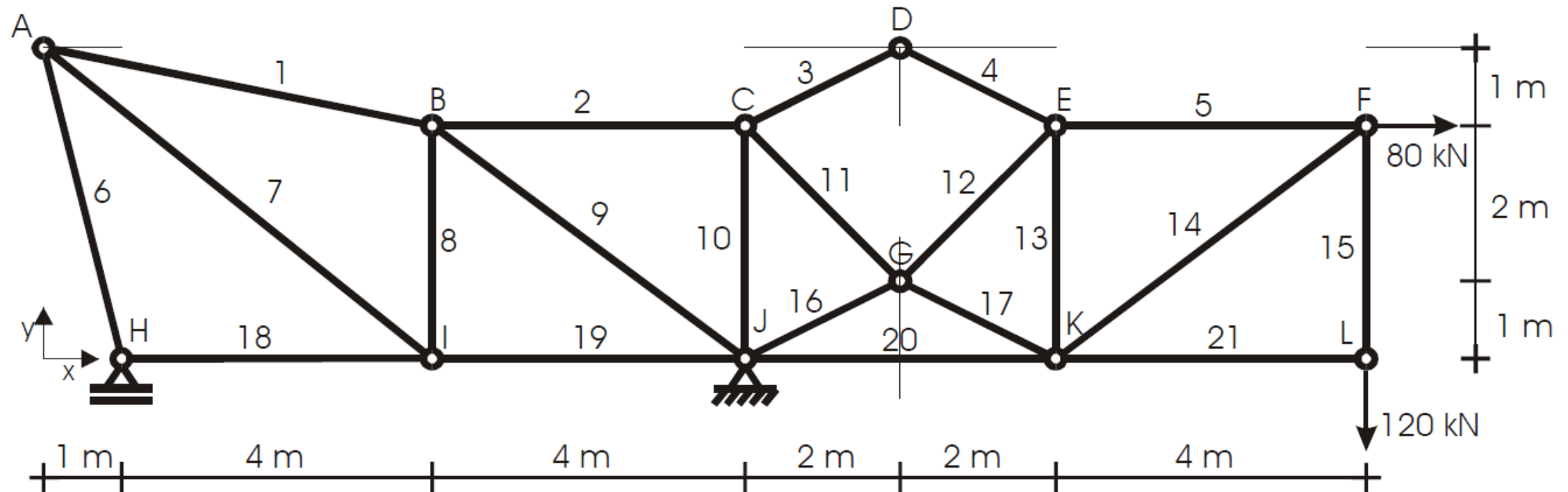
Para a treliça da figura, pedem-se:

a) as reações de apoio;

Q1 P3 2001

b) as forças normais  $N$  nas barras 2 e 9;

c) as forças normais  $N$  nas barras 5 e 14, calculadas pelo método do equilíbrio dos nós.

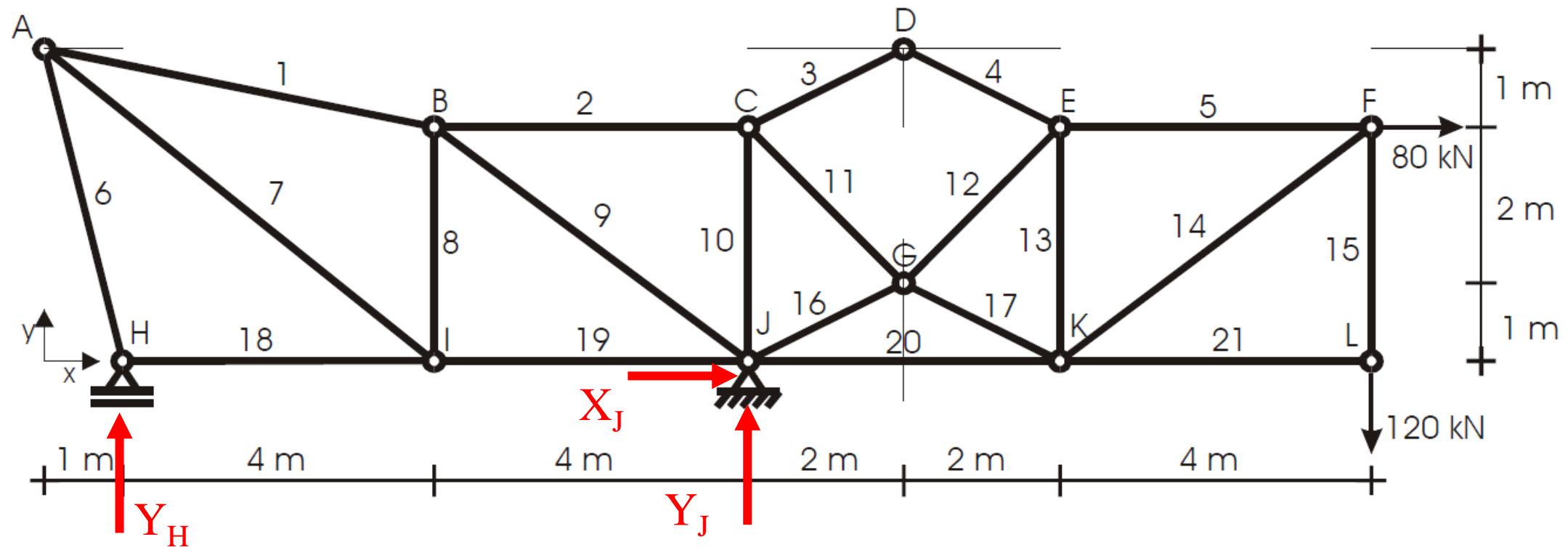


# Reações

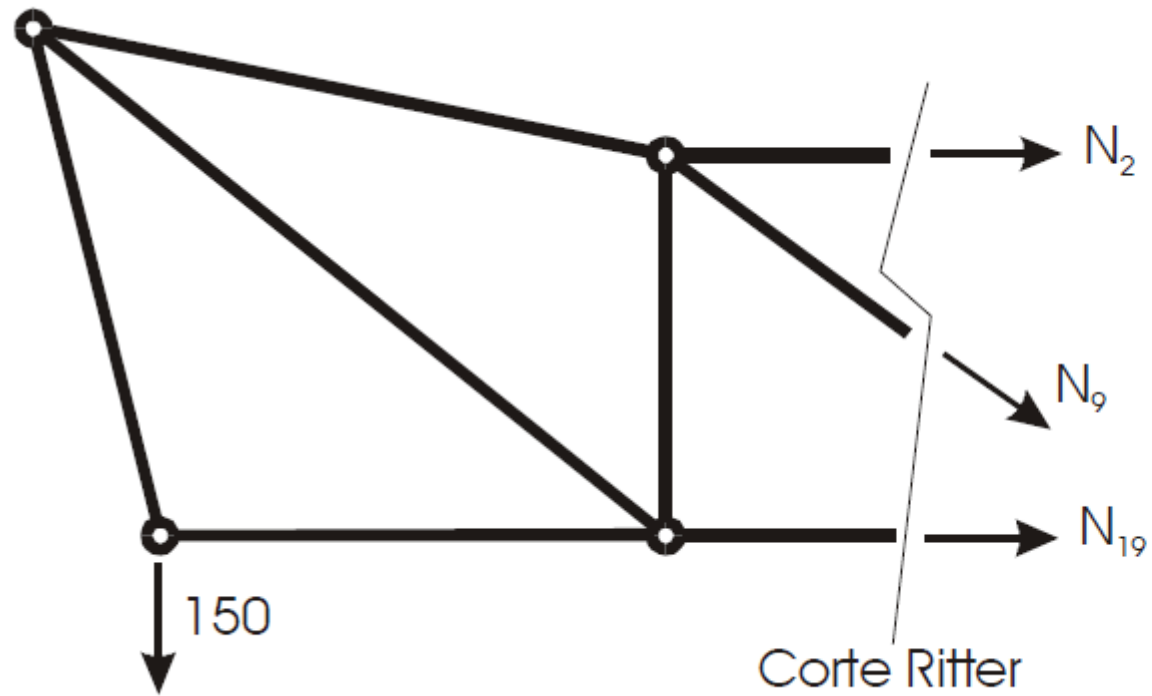
$$\sum X = 0 - X_J = -80 \text{ kN}$$

$$\sum M_J = 0 - Y_H = -150 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 - Y_J = +270 \text{ kN}$$



Ritter



$$\sum M_J = 0 \text{ -- } N_2 = +400 \text{ kN}$$

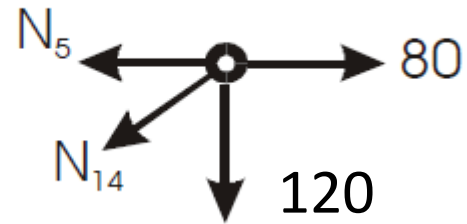
$$\sum Y = 0 \text{ - } N_9 = -250 \text{ kN}$$



Nós

Nó L:  $N_{15} = 120 \text{ kN}$

Nó F:



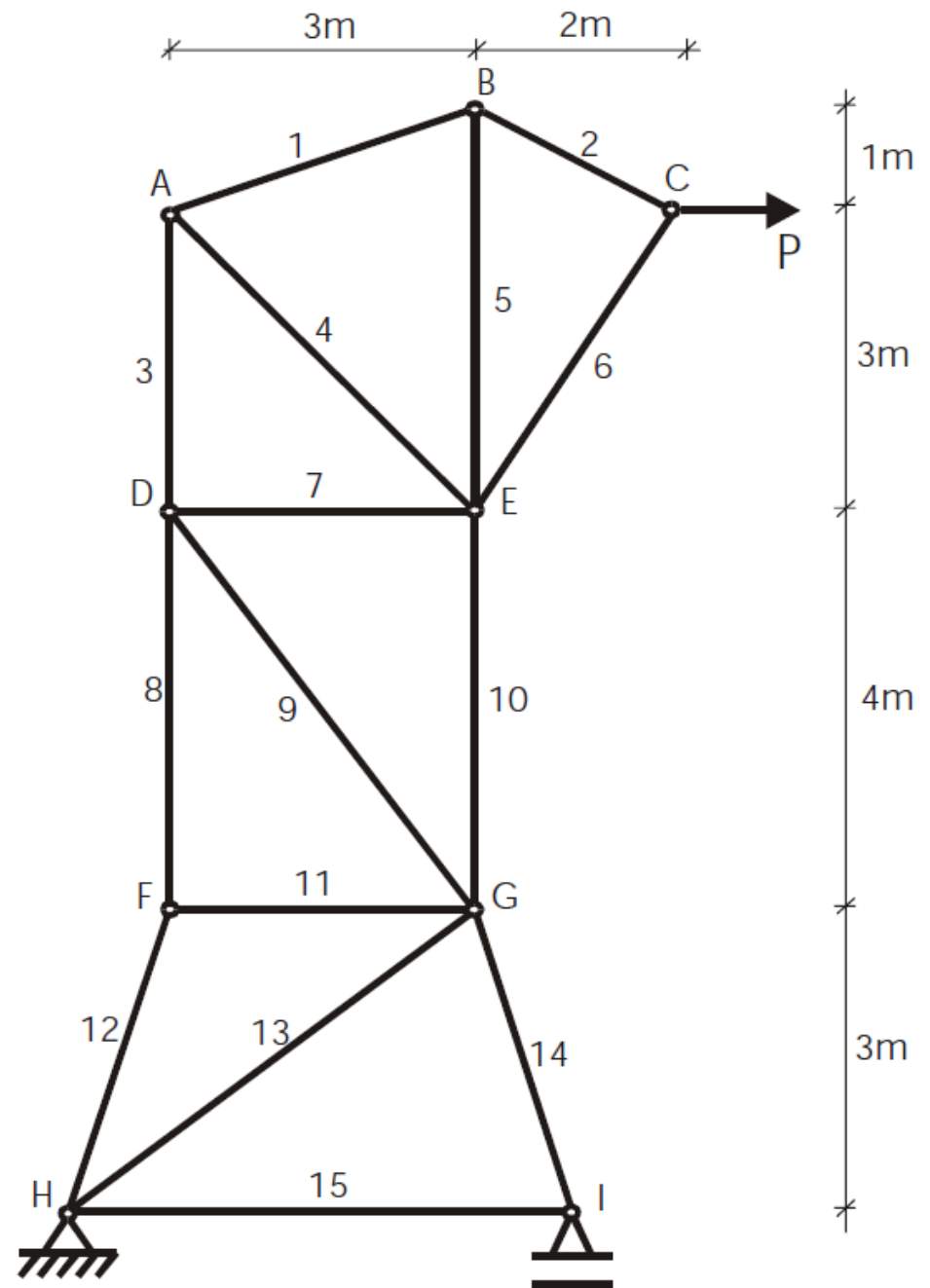
$$\sum Y = 0 - N_{14} = -200 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 - N_5 = +240 \text{ kN}$$

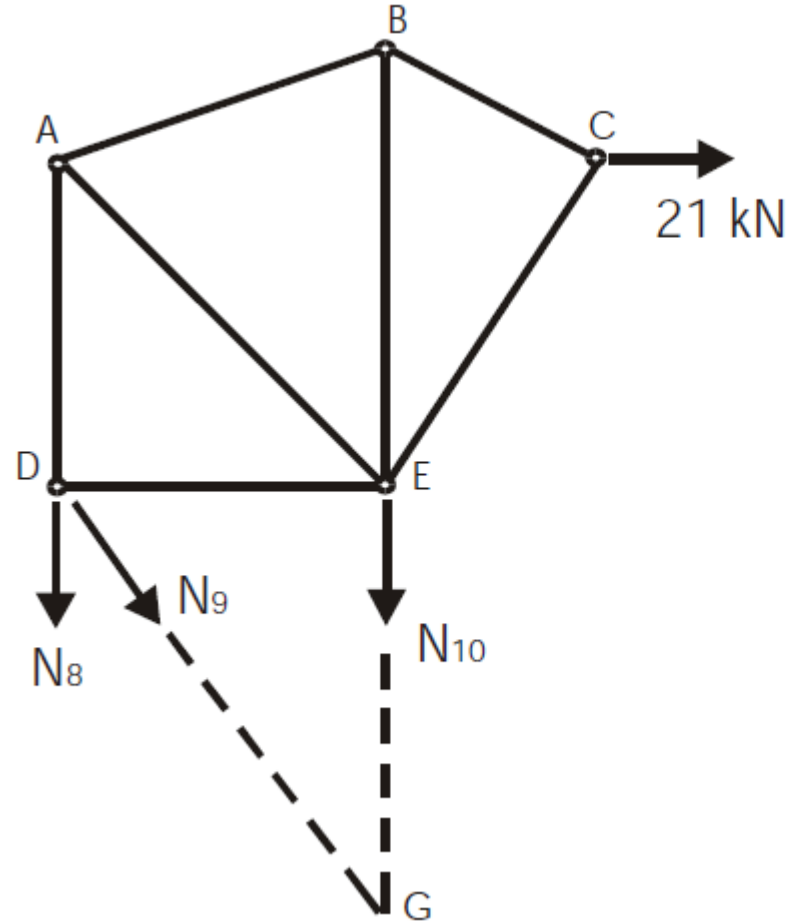
## Q2 PSub 2002

Na estrutura da figura, solicitada pela carga horizontal no nó C, calcule os esforços nas barras 3, 7, 8 e 9, utilizando os métodos de Ritter e do equilíbrio dos nós.

$$P = 21 \text{ kN}$$



Ritter



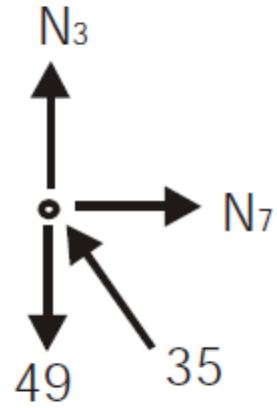
$$\sum M_G = 0$$
$$N_8 \cdot 3 - 21 \cdot 7 = 0$$

$$N_8 = 49 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0$$
$$N_9 \cdot \frac{3}{5} + 21 = 0$$

$$N_9 = -35 \text{ kN}$$

Nó D



$$\sum V = 0$$

$$N_3 - 49 + 35 \cdot \frac{4}{5} = 0$$

$$N_3 = 21 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0$$

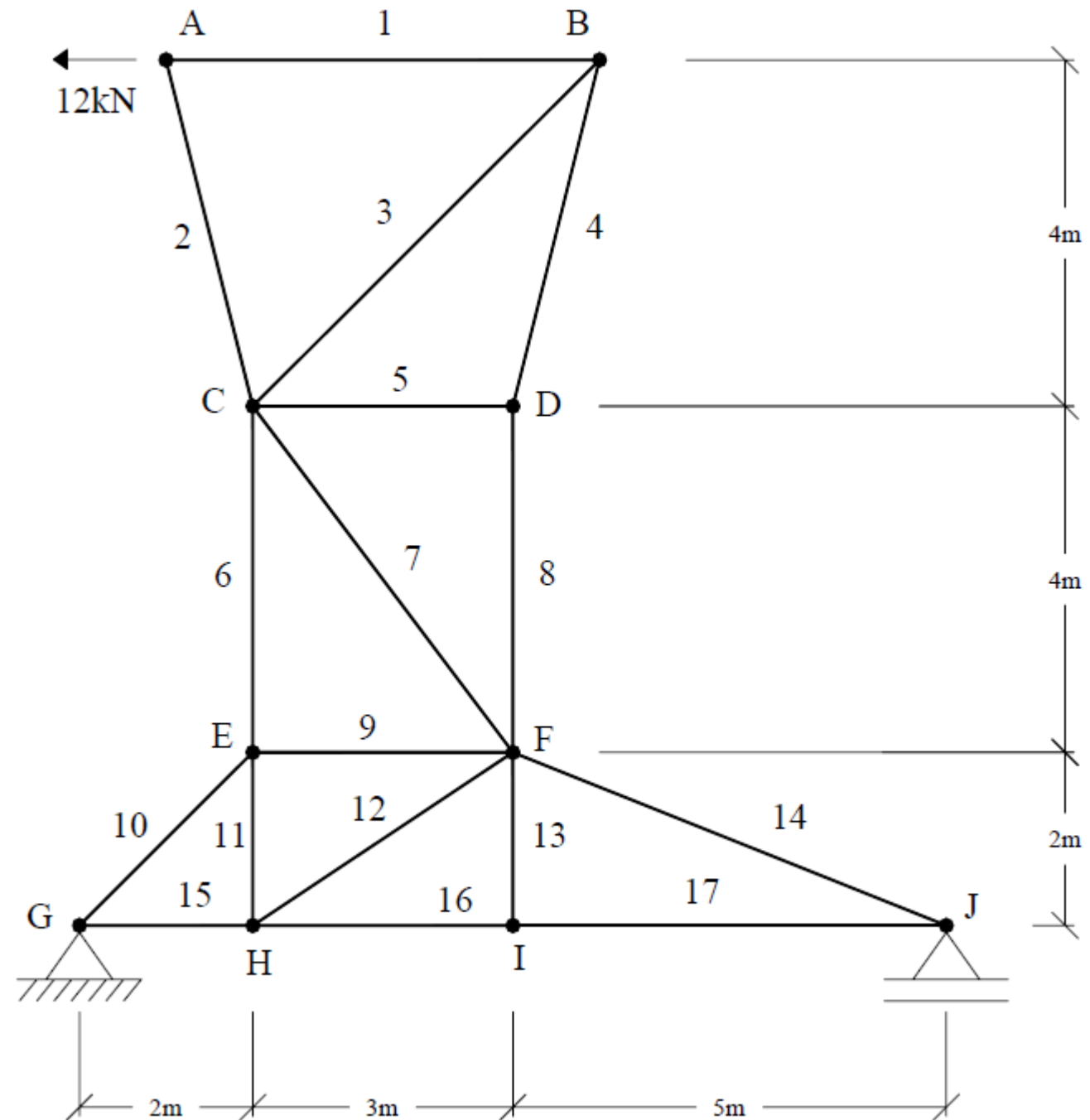
$$N_7 - 35 \cdot \frac{3}{5} = 0$$

$$N_7 = 21 \text{ kN}$$

## Q2 PSub 2003

Para a treliça ilustrada, pedem-se:

- As reações de apoio;
- As forças normais nas barras 6, 7 e 8;
- As forças normais nas barras 9, 10 e 11.

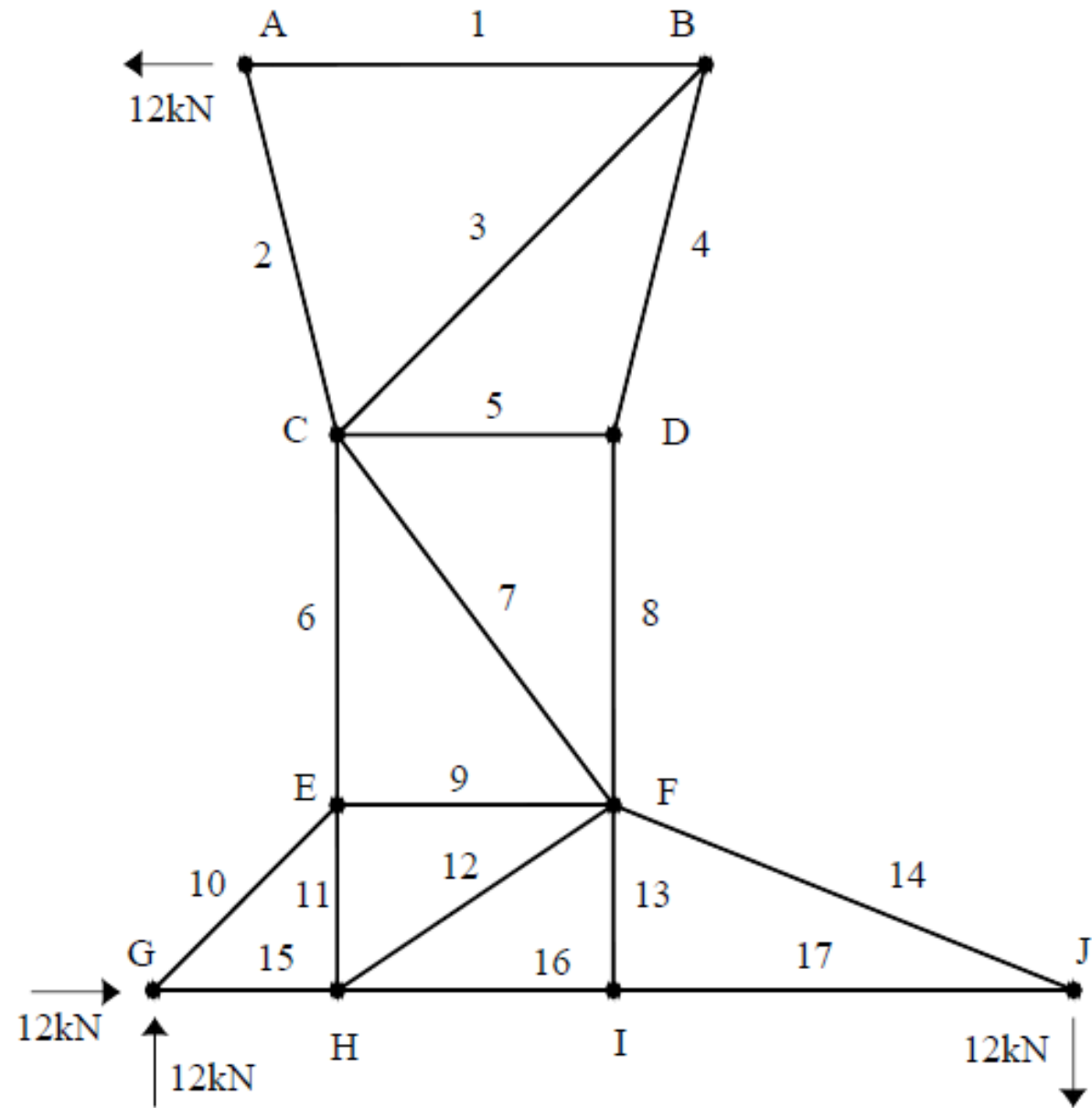


# Reações

$$X_G = 12kN$$

$$Y_G = 12kN$$

$$Y_J = -12kN$$

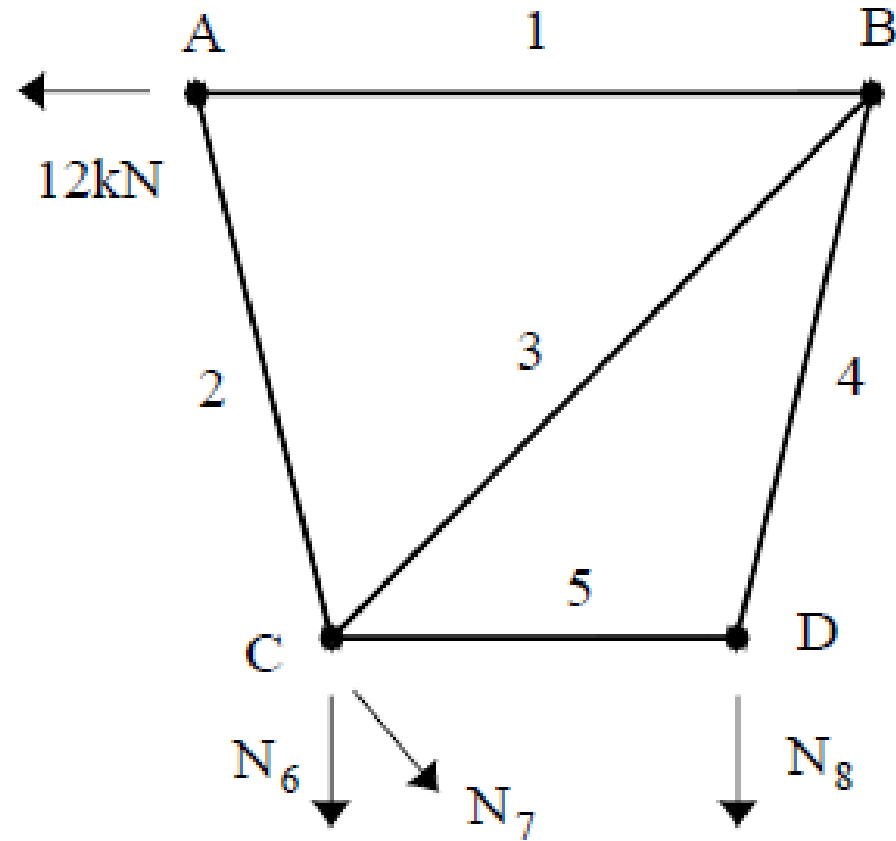


## Corte de Ritter

$$\sum H = 0 \Rightarrow N_7 = 20kN$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow N_8 = 16kN$$

$$\sum M_F = 0 \Rightarrow N_6 = -32kN$$

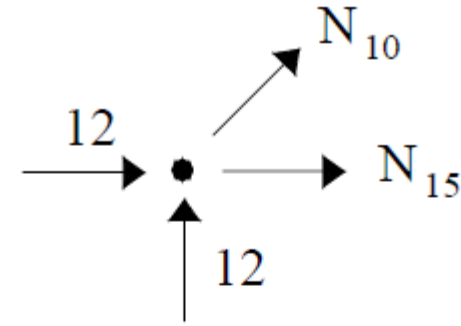


Verificação:

$$\sum V = 0 \Rightarrow ok$$

## Equilíbrio nós G e E

Nó G:



$$\sum V = 0 \Rightarrow N_{10} = -12\sqrt{2}kN$$

Nó E:

$$\sum V = 0 \Rightarrow N_{11} = -20kN$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow N_9 = -12kN$$

