ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P1. Data: 29/04/2023**

Justifique as respostas.

1. Utilize o método de Gauss-Jordan. Determine o valor de m para que o sistema linear:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_2 + x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = x_3 + 2 \\ x_1 + x_2 + m^2 x_3 = 5x_3 + m \end{cases}$$

   (a) Não tenha solução,

   (b) Tenha uma solução única,

   (c) Tenha infinitas soluções

   Resolução:
   Quando $m = 2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Logo existem infinitas soluções. Solução do item (c).

   Se $m = -2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

   O que fornece $0 = -4$, falso. Logo não existe solução válida. Solução do item (a).

   Por último, considerando $m \neq 2$ e $m \neq -2$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m-2}{m^2-4} = \frac{1}{m+2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{m+5}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{m}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{m+2} \end{bmatrix}$$

   que fornece uma única solução para cada valor de m, diferente de 2 e -2. Solução do item (b).

2. Em um time de futebol, o treinador anotou os 30 resultados de jogos (Venceu (V), Perdeu (D) e Empatou (E)). Os registros estão na seguinte sequência

$$D\ E\ V\ D\ D\ E\ E\ V\ V\ V\ E\ D\ V\ V\ D\ D\ E\ E\ D\ V\ V\ V\ E\ E\ D\ D\ V\ E\ D\ E\ E.$$

Determine a matriz de transição que corresponde e calcule o estado estacionário (se existir).
Se o time não melhorar nem piorar, conseguira mais vitorias que derrotas a longo prazo ?
Resolução: a matriz de transição é

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

O estado estacionário é

$$E = \begin{bmatrix} vencer \\ perder \\ empatar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{79} \\ \frac{24}{79} \\ \frac{29}{79} \end{bmatrix}.$$

Portanto, se não piorar conseguirá mais vitorias do que derrotas.

3. Em uma cidade do interior existem três indústrias primárias. Uma mina de cobre que para produzir R$ 2.00 de cobre consome R$ 0.50 de cobre, R$ 0.15 de transporte e R$ 0.30 de energia elétrica. Uma estrada de ferro que para produzir R$ 2.00 de transporte, requer R$ 0.15 de cobre, R$ 0.15 de transporte e R$ 0.60 de energia elétrica. Uma planta geradora de energia elétrica que para produzir R$ 1.00 de energia elétrica consome R$ 0.20 de cobre, R$ 0.40 de energia elétrica e R$ 0.50 de transporte. Para o presente ano, as indústrias têm uma demanda externa de R$ 1.5 milhões de cobre, R$ 0.90 milhões de transporte e R$ 1.7 milhões de energia elétrica.

   (a) Monte um sistema de equações que possibilite resolver quanto cada indústria deve produzir para atender as demandas.
   Resolução: Para determinar as incôgnitas do problema, sabemos que é conhecida a produção da indústria do cobre e transporte em valor de 2.00 real de cada produto. Então, deve-se padronizar tudo em valor de R$ 1.00 para cada produto.
   Agora, para atender a demanda externa das três indústrias, elas precisam atender a demanda (interna) entre elas. Caso contrário por exemplo, se a mina de cobre não abastece a estrada de ferro de cobre, ela não poderá produzir o transporte solicitado, e a própria mina precisa de cobre para produzir mais cobre.
   Logo,

$$\begin{cases} x = 1500000 + 0.25x + 0.075y + 0.20z \\ y = 900000 + 0.075x + 0.075y + 0.50z \\ z = 1700000 + 0.15x + 0.30y + 0.40z \end{cases}$$

   O sistema a ser resolvido é

$$\begin{cases} 0.75x - 0.075y - 0.20z = 1500000 \\ 0.925y - 0.075x - 0.50z = 900000 \\ 0.60z - 0.15x - 0.30y = 1700000 \end{cases}$$

   (b) Determine a matriz inversa da matriz de coeficientes obtida na parte (a).
   Resolução: A matriz inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{54}{35} & \frac{2}{5} & \frac{89}{105} \\ \frac{16}{35} & \frac{8}{5} & \frac{52}{35} \\ \frac{43}{70} & \frac{9}{10} & \frac{367}{140} \end{bmatrix}$$

4. Em uma pesquisa nutricional utilizou-se de adultos e crianças de ambos os sexos. A distribuição dos participantes é como na matriz

$$P = \begin{array}{c c} \begin{array}{cc} Homens & Mulheres \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 80 & 100 \\ 120 & 200 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Adulto \\ Criança \end{array} \end{array}$$

O número de gramas diárias consumidas pelos participantes aparece na seguinte matriz

$$C = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} Pr & G & Ca \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} Adulto \\ Crianca \end{array} \end{array}$$

onde $Pr = Proteina$, $G = Gordura$ e $Ca = Carbohidrato$.
Utilizando elementos da álgebra linear (soma, multiplicação veces escalar e multiplicação de matrices) responda:

(a) Quantas gramas de proteínas consomen diariamente todos os homens participantes?
Resposta: É necessário utilizar a transposta da matriz P, caso contrário não terá informação sobre Homens e Mulheres.
Utilizando os elementos da álgebra linear observa-se que o produto das matrices dá

$$P^t C = \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2800 & 4000 & 5200 \\ 4000 & 6000 & 8000 \end{bmatrix}$$

Portanto, todos os homens consomem 2800 gramas de proteínas.

(b) Quantas gramas de gorduras consomen diariamente as mulheres participantes?
Resposta: Também pelo produto das matrices temos informação do consumo de gorduras de todas as mulheres participantes, dando 6000 gramas.