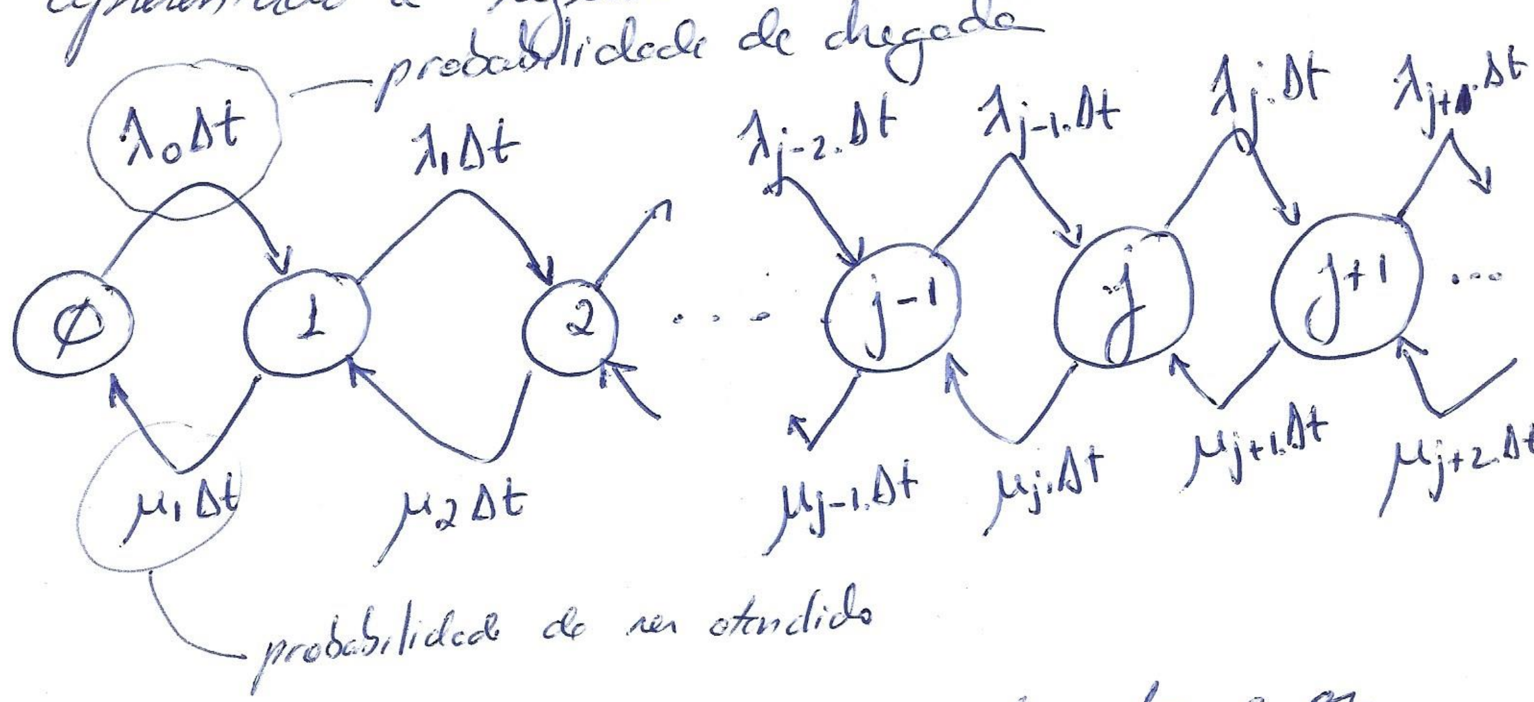
Aula 8 – Análise de Fila Única

(Capítulo 31 – Raj Jain). (M/M/1 e M/M/m)

1. Processo de Nascimento–Morte (Birth – Death).

(Processo de Poisson)

O diagrama de transição de estado é apresentado a seguir:



Assume-se que os tempos entre chegadas e os tempos de serviço são distribuídos exponencialmente.

As equações de estado são:

$$p_0(t+\Delta t) = (1-\lambda_0 \Delta t) \cdot p_0(t) + \mu_1 \Delta t \cdot p_1(t)$$

$$p_1(t+\Delta t) = \lambda_0 \cdot \Delta t \cdot p_0(t) + (1-\mu_1 \Delta t - \lambda_1 \Delta t) \cdot p_1(t) + \mu_2 \Delta t \cdot p_2(t)$$

$$\vdots$$

$$p_j(t+\Delta t) = \lambda_{j-1} \cdot \Delta t \cdot p_{j-1}(t) + (1-\mu_j \Delta t - \lambda_j \Delta t) p_j(t) + \mu_{j+1} \cdot \Delta t \cdot p_{j+1}(t)$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_j(t+\Delta t) - p_j(t)}{\Delta t}}_{\frac{dp_j(t)}{dt}} = \lambda_{j-1} \cdot p_{j-1}(t) - (\mu_j + \lambda_j)\, p_j(t) + \mu_{j+1} \cdot p_{j+1}(t)$$

Sob condições de estabilidade ("stead state"), $p_j(t)$ se aproxima de um valor fixo p_j

$$\begin{cases} \lim_{t \to \infty} p_j(t) = p_j \\ \lim_{t \to \infty} \frac{dp_j(t)}{dt} = \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 = \lambda_{j-1} \cdot p_{j-1} - (\mu_j + \lambda_j)\, p_j + \mu_{j+1} \cdot p_{j+1}$$

$$\begin{cases} p_{j+1} = \frac{(\mu_j + \lambda_j)}{\mu_{j+1}} \cdot p_j - \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_{j+1}} \cdot p_{j-1} \Big|_{j = 1, 2, 3 \ldots} \\ \frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 \cdot p_0(t) + \mu_1\, p_1(t) \end{cases}$$

$\Downarrow$ "$\lim t \to \infty$"

$$0 = -\lambda_0 \cdot p_0 + \mu_1 \cdot p_1 \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0}$$

$\boxed{j=1} \longrightarrow p_2 = \frac{(\mu_1+\lambda_1)}{\mu_2} \cdot p_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} \cdot p_0$

$$p_2 = \frac{(\mu_1+\lambda_1)}{\mu_2} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{\cancel{\mu_1\lambda_0} + \lambda_1\lambda_0 - \cancel{\lambda_0\mu_1}}{\mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p_0$$

$\boxed{j=2} \longrightarrow p_3 = \frac{\mu_2+\lambda_2}{\mu_3} \cdot p_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \cdot p_1$

$$p_3 = \frac{\mu_2+\lambda_2}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p_0 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0$$

$$p_3 = \frac{\cancel{\mu_2\lambda_1\lambda_0} + \lambda_2\lambda_1\lambda_0 - \cancel{\mu_2\lambda_1\lambda_0}}{\mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1} \cdot p_0 \quad \ldots$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdots \mu_n} \cdot p_0}$$

(3A)

$$p_n = p_0 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \qquad n = 1, 2, \dots, \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

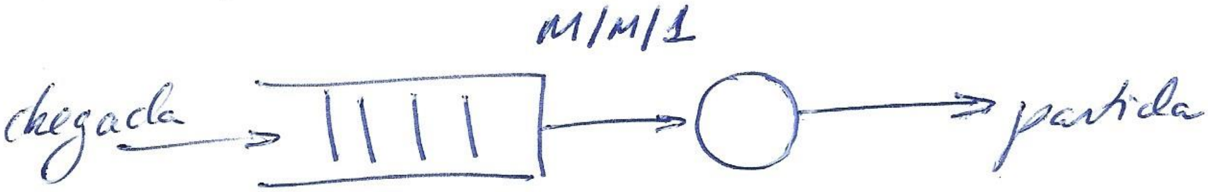
$$p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p_0 + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1}{\mu_1 \cdot \mu_2} \cdot p_1 + \dots = 1$$

$$p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_0 \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \right)}}$$

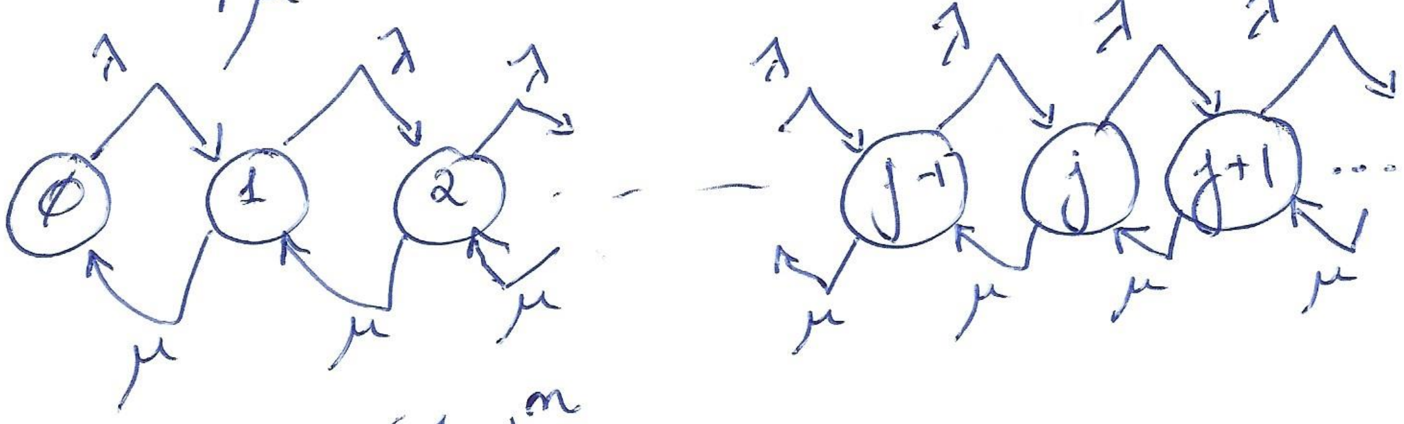
2. Fila M/M/1

Usado para modelar um sistema de atendimento com um único processador ou dispositivo de atendimento individual.



Não há limitações no tamanho do buffer nem no tamanho da população. A disciplina usada é FCFS.

$$\begin{cases} \lambda - \text{taxa média de chegada} \\ \mu - \text{taxa média de saída} \end{cases}$$



$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0$$

"Intensidade de Tráfego": $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\Longrightarrow \boxed{p_n = \rho^n \cdot p_0} \quad \boxed{\sum p_i = 1}$$

$$p_0 = \frac{1}{\underbrace{1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{\infty}}}$$

$$\text{PG} \longrightarrow \left[S = \frac{a_1 . (q^n - 1)}{q-1} \right]$$

$$\Longrightarrow S = \frac{1(\rho^n - 1)}{(\rho - 1)} ; \rho < 1$$

Quando $n \to \infty \Rightarrow S = \frac{-1}{\rho - 1} = \frac{1}{1-\rho}$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} \Rightarrow \boxed{p_0 = 1 - \rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_n = \rho^n . (1-\rho)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

Utilização do Serviço:

$$\boxed{U = 1 - p_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu}}$$

A VAZÃO (throughput) quando $\lambda \leq \mu \Rightarrow$ VAZÃO $= \lambda$

Quando $\lambda > \mu \Rightarrow$ VAZÃO $= \mu$

O número médio de ~~jobs~~ usuários no sistema é dado por:

$$E[n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^n (1-\rho) = (1-\rho) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^n$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot a^i = \frac{a - n \cdot a^n + (n-1)\, a^{n+1}}{(1-a)^2}, \quad a \neq 1$$

Para $a < 1$ e $n \to \infty \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot a^i \Rightarrow \frac{a}{(1-a)^2}$

$$\Rightarrow E[n] = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \boxed{E[n] = \frac{\rho}{1-\rho}}$$

a variância do número médio de ~~jobs~~ Usuários no sistema:

$$Var[n] = E[n^2] - (E[n])^2$$

$$\boxed{Var[n] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}$$

O número médio de ~~jobs~~ Usuários na Fila é dado por:

$n_q = n - 1$ (nº de jobs na Fila)

$$E[n_q] = \sum_{n=1}^{\infty} n_q \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) (1-\rho) \rho^n$$

$$= (1-\rho) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot \rho^n = \cancel{(1-\rho)\left[\sum_{n=1}^{\infty} n \rho^n - \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right]}$$

$$\cancel{= (1-\rho) \cdot \left[\frac{\rho}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{1-\rho}\right] = \frac{\rho}{(1-\rho)} - 1} = (1-\rho) \cdot \rho \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \cdot \rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho) \cdot \rho \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \boxed{E[n_q] = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}}$$

Probabilidade de mais que n ~~jobs~~ Usuários no sistema / ou igual a n ~~jobs~~ Usuários:

$$P(\geq n \text{ jobs no sistema}) = \sum_{j=n}^{\infty} p_j$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} (1-\rho).\rho^{j} = (1-\rho).\sum_{j=n}^{\infty} \rho^{j}$$

$$= (1-\rho)\,(\rho^{n} + \rho^{n+1} + \cdots +)$$

$$\begin{cases} a_1 = \rho^{n} \quad q = \rho \longleftrightarrow S = \dfrac{a_1 (q^{j}-1)}{(q-1)} \\ q < 1 \text{ e } j \to \infty \\ \Rightarrow S = \dfrac{\rho^{n}.(-1)}{\rho - 1} = \dfrac{\rho^{n}}{(1-\rho)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(\geq n \text{ } \cancel{\text{jobs}} \text{ Usuários no sistema}) = (1-\rho).\frac{\rho^{n}}{(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\geq n \text{ } \cancel{\text{jobs}} \text{ Usuários no sistema}) = \rho^{n}}$$

Por meio da Lei de Little tem-se:

Nº médio de ~~[illegible]~~ usuários no sistema = taxa de chegada * tempo médio de resposta

$$E[n] = \lambda . E[r]$$

$$E[r] = \frac{E[n]}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}}{\lambda}$$

$$E[r] = \frac{\frac{\cancel{\lambda/\mu}}{\frac{\mu-\lambda}{\mu}}}{\cancel{\lambda}} = \boxed{\frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = E[r]}$$

A Função Distribuição Cumulativa do Tempo de Resposta é:

$$F(r) = 1 - e^{\lambda^* r}$$

$$\lambda^* = \frac{1}{E[r]} = \frac{1}{\frac{1}{\mu(1-\rho)}} = \mu(1-\rho)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(r) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)r}}$$

Probabilidade de K ~~[illegible]~~ usuários na fila:

$$p(n_q = K) = ?$$

Se $K = 0 \Rightarrow p(n_q = 0) = p_0 + p_1 = (1-\rho) + \rho(1-\rho)$

$= (1-\rho)(1+\rho) = \underline{\underline{(1-\rho^2)}}$

Se $K > 0 \Rightarrow p(n_q = K) = p(n = K+1) = \underline{\underline{(1-\rho).\rho^{K+1}}}$

($n = K+1$ no sistema, pois 1 está sendo atendido!)

Tempo médio de Espera:

$$E[r] = E[w] + E[s]$$

[tempo médio em atendimento no sistema]

$$E[w] = E[r] - E[s]$$

$$E[w] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{1}{\mu}$$

$$E[w] = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-(\mu-\lambda)}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \rho \cdot \frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} \Rightarrow \boxed{E[w] = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} \cdot \rho}$$

Exemplo 1: Num Gateway de uma Rede as medidas mostram que os pacotes chegam a uma taxa de 125 pacotes por segundo e o Gateway leva em torno de 2 mseg para direcioná-los. Usando o modelo M/M/1, analise esse gateway. Qual a probabilidade de "overflow" do buffer se o Gateway possui apenas 13 buffers? Quantos buffers seriam necessários para manter a perda de pacotes abaixo de 1 pacote por milhão?

$\lambda = 125 \text{ pps} \quad \mu = \frac{1}{0{,}002} = 500 \text{ pps}$

Intensidade de Tráfego = Utilização do Serviço = $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$\rho = \frac{125}{500} \Rightarrow \rho = 0{,}25$

Probabilidade de n pacotes no Gateway = $\rho^n (1-\rho)$

$= 0{,}75 \cdot (0{,}25)^n$

Número médio de pacotes no Gateway = $\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = 0{,}33$

Tempo médio de resposta no Gateway = $\frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{500}}{1-0{,}25} = 2{,}66 \text{ms}$

Prob.($\geq$ 13 ~~buffers~~ packets) = $\rho^{13} = 0{,}25^{13} \Rightarrow$ $\boxed{\cong 15 \text{ pacotes / billion pacotes}}$

$n = ? \Rightarrow \rho^n \leq 10^{-6} \quad n \cdot \log \rho \geq -6 \quad \boxed{n > \frac{-6}{\log 0{,}25} = 9{,}966}$

Esses dois últimos cálculos de probabilidade constituem-se em uma aproximação, pois o correto seria usar o modelo M/M/1/B (número finito de buffers). Entretanto, como a taxa de utilização (ρ) é baixa e o número de buffers considerados está bem acima do número médio de pacotes no Gateway (0,33), o resultado obtido é uma boa aproximação.

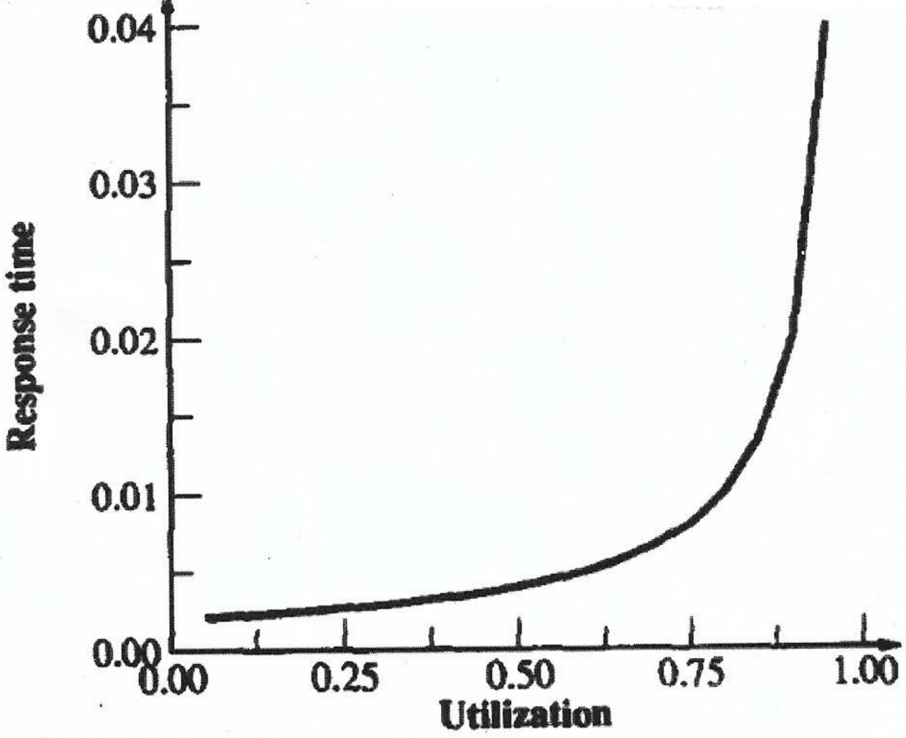
Vamos considerar agora o tempo médio de resposta:

$$E[r] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$$

À medida que a taxa de chegada (λ) cresce, aumenta ~~diminui~~ o fator de utilização $\rho\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$.

Quando ($\lambda \to \mu$), o tempo de resposta tende a ∞!

Essa é a razão para não se utilizar filas tipo M/M/1 com fator de utilização (ρ) próximo a 1.



Exemplo 2:

Deseja-se selecionar um processador com taxa de serviço μ sendo que as tarefas são submetidas a uma taxa $\lambda = 1$ tarefa/s e deseja-se que o tempo médio das tarefas no sistema não excedam 0,5s. Assume-se que as tarefas chegam de acordo com o processo de Poisson e os tempos de serviço são distribuídos exponencialmente. Pode-se adotar o modelo M/M/1.

$$E[r] < 0{,}5 \qquad \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} < 0{,}5 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{\frac{1}{\mu}}{1-\frac{1}{\mu}} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{\mu} = 0{,}5 - 0{,}5 \cdot \frac{1}{\mu}$$

$$1{,}5 \cdot \frac{1}{\mu} = 0{,}5 \Rightarrow \mu = \frac{1{,}5}{0{,}5} \Rightarrow \mu = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu > 3 \text{ tarefas/seg}}$$

Exemplo 3:

Num sistema de comunicação a capacidade da linha de transmissão é $C = 1200$ bits/seg.

A taxa de chegada das mensagens respeitam o processo de Poisson. Uma mensagem consiste de L bits, onde L é uma variável randômica. Assume-se que L é distribuída exponencialmente com média de 600 bits. O problema é determinar a taxa máxima de chegada possível de forma a garantir um tempo médio de espera menor que 1 seg. Neste problema, o "servidor" é a linha de transmissão.

$$E[W] = \rho \cdot \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\mu = \frac{1200}{600} \rightarrow \mu = 2 \text{ msg/s}$$

$$E[W] = \rho \cdot \frac{0,5}{(1-\rho)} < 1$$

$$0,5\rho < 1 - \rho \rightarrow 1,5\rho < 1 \rightarrow \rho < \frac{2}{3}$$

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda < \frac{4}{3} \text{ msg/seg}}$$

11C

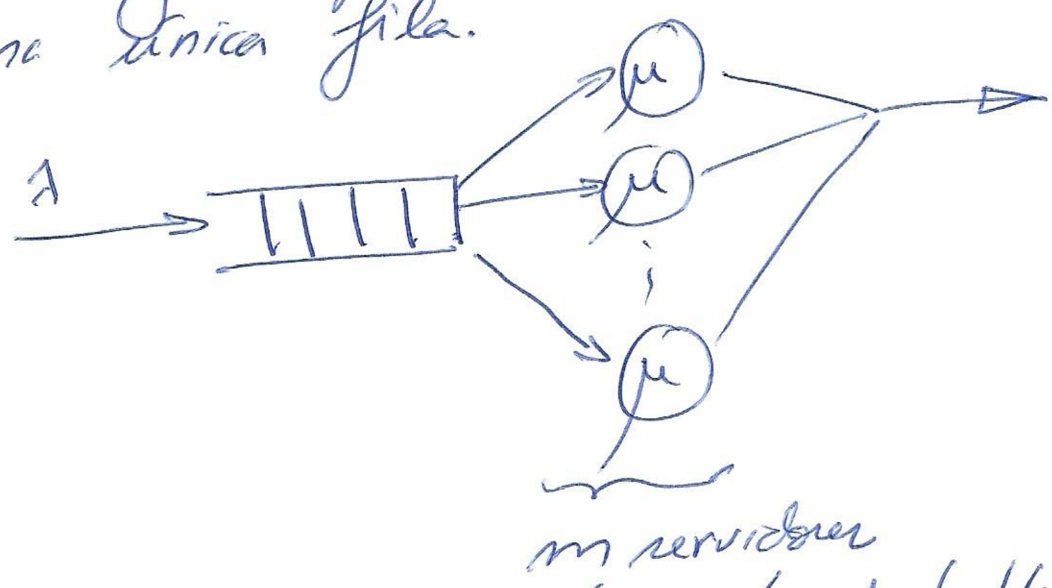
Neste caso a taxa de utilização do sistema de comunicação é:

$$\rho < \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4/3}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho < \frac{2}{3}}$$

3. Fila M/M/m

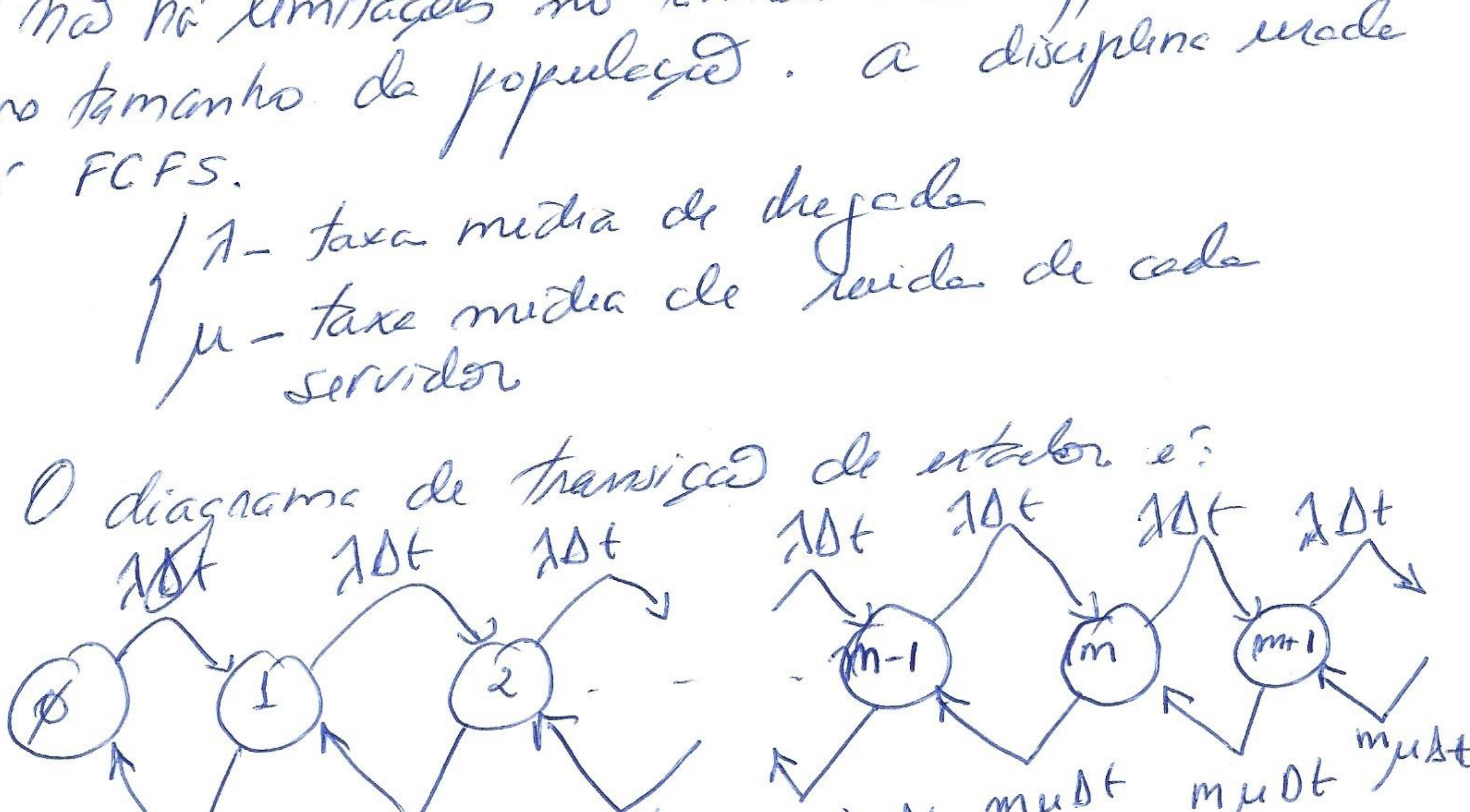
Usado para modelar sistemas multiprocessadores ou que possuam diversos servidores idênticos e as tarefas esperando por estes servidores ficam numa única fila.



Não há limitações no tamanho do buffer nem no tamanho da população. A disciplina usada é FCFS.

- λ - taxa média de chegada
- μ - taxa média de saída de cada servidor

O diagrama de transição de estados é:



Do processo morte-Nascimento:

$$p_n = \frac{\lambda_0 . \lambda_1 . \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 . \mu_2 . \ldots . \mu_n} . p_0 \; , \; n = 1, 2, \ldots, \infty$$

onde $\lambda_i = \lambda \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ e

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu \; , \; n = 1, 2, \ldots, m-1 \; (n < m) \\ m\mu \; , \; (n > m) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_n = \dfrac{\lambda^n}{\mu^n . n!} . p_0 \quad (n < m) \\ \\ p_n = \dfrac{\lambda^n}{m! \, \mu^n . m^{n-m}} . p_0 \quad (n \geq m) \end{cases}$$

<u>Intensidade de Tráfego</u>: $\boxed{\rho = \dfrac{\lambda}{m\mu}}$

O sistema é estável se $\underline{\underline{\rho < 1}}$.

$$\underline{\frac{\lambda}{\mu} = m\rho}$$

Qual a probabilidade de zero tarefas no sistema?

(14)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 + p_0 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m.\rho)^n}{m!} + p_0 \cdot \frac{(m.\rho)^m}{m!} \cdot \underbrace{\sum_{n=m}^{+\infty} \rho^{n-m}}_{(*)} = 1$$

$$(*) = (\rho^0 + \rho^1 + \rho^2 + \dots + \dots) \rightarrow \left[\frac{1}{1-\rho}\right]$$

$$\Rightarrow p_0 + p_0 \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{m!} + p_0 \cdot \frac{(m.\rho)^m}{m!} \cdot \frac{1}{(1-\rho)} = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{m!} + \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}\right]}$$

Qual a probabilidade de uma tarefa que chega ter de esperar na fila?

$$\sigma = P(\geq m \text{ tarefas}) = p_m + p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots$$

$$\sigma = \frac{(m.\rho)^m}{m!} \cdot p_0 \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m}$$

$$\sigma = \frac{(m.\rho)^m}{m!} \cdot p_0 \cdot \frac{1}{(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = p_0 \cdot \frac{(m.\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}}$$

Para fila com $m = 1$ (1 servidor)

$$\sigma = p_0 \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)} = p_0 \cdot \frac{\rho}{p_0}$$

$\Rightarrow \boxed{\sigma = \rho}$ probabilidade de um servidor estar ocupado.

Qual o número médio de Tarefas na Fila?

$$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \cdot p_n$$

$$= \sum_{n=m+1}^{\infty} (n-m) \cdot \frac{\rho^n \cdot m^m}{m!} \cdot p_0$$

$$= p_0 \cdot \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!} \cdot \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \rho^{n-m} \cdot (n-m)}_{1 \cdot \rho + 2 \cdot \rho^2 + 3 \cdot \rho^3 + \cdots \text{ (pg 6)}}$$

$$= p_0 \cdot \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E[n_q] = \sigma \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)}}$$

Qual o número médio de Tarefas em Serviço?

$$E[n_s] = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} n \cdot p_n}_{A} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} m \cdot p_n}_{\text{todos servidores ocupados (B)}}$$

$$A = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + (m-1) \cdot p_{m-1}$$

$$= p_0 \frac{(m \cdot \rho)^1}{1!} + p_0 \frac{(m \cdot \rho)^2}{2!} \cdot 2 + 3 \cdot p_0 \cdot \frac{(m\rho)^3}{3!} + \cdots (m-1) \cdot p_0 \cdot \frac{(m\rho)^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$A = m.\rho\left(p_0 + m.\rho.p_0 + \frac{(m.\rho)^2}{2!}.p_0 + \cdots + \frac{(m.\rho)^{m-2}}{(m-2)!}.p_0\right)$$

$$A = m.\rho\,(p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{m-2})$$

$$\underline{A = m.\rho\,(1 - p_{m-1} - \sigma)}$$

$$B = \sum_{n=m}^{\infty} m.p_n = m\,(\underbrace{p_m + p_{m+1} + \cdots}_{\sigma})$$

$$\Rightarrow \underline{B = m.\sigma}$$

Portanto:

$$E[ns] = A + B = m\rho(1 - p_{m-1} - \sigma) + m\sigma$$

$$p_{m-1} = \frac{(\rho m)^{m-1}}{(m-1)!}.p_0$$

$$p_{m-1}.m\rho = \frac{(\rho m)^{m}}{(m-1)!}.p_0 = \sigma.m(1-\rho).$$

$$\Rightarrow E[ns] = m\rho - m.\rho.p_{m-1} - m\rho.\sigma + m.\sigma$$

$$= m\rho - \cancel{\sigma.m(1-\rho)} + \cancel{\sigma.m(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E[n_s] = m \cdot \rho}$$

Assim o número medio de tarefas no sistema é dado por:

$$E[n] = \underbrace{E[n_q]}_{\text{na fila}} + \underbrace{E[n_s]}_{\text{em serviço}}$$

$$\boxed{E[n] = \sigma \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)} + m \cdot \rho}$$

Qual o tempo Ocupado por Servidor?

(taxa de utilização).

Vamos observar o sistema por um longo tempo T.

O número total de tarefas chegando será λT.

O tempo total de uso dos m servidores será $\frac{\lambda T}{\mu}$, e

assim o tempo de uso de cada servidor

será $\left(\frac{\lambda T}{\mu}\right)/m$.

Dessa forma o Fator de Utilização de Cada Servidor seria:

$$U = \frac{\left(\frac{\lambda T}{\mu}\right)/m}{T} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\lambda}{\mu m} = \rho}$$

Outra forma de analisar:

Fator de Utilização quando tem-se 1 servidor:

$$\boxed{U = \frac{\lambda}{\mu}}$$

Com m servidores teremos:

$$\boxed{U = \frac{\lambda}{m\mu}}$$

Como Calcular o <u>Tempo Médio de Resposta</u>?

De acordo com a <u>Lei de Little</u> (pg 8):

$$E[n] = \lambda . E[r]$$

$$\Rightarrow E[r] = \frac{E[n]}{\lambda} = \frac{m\rho + \frac{\sigma . \rho}{1-\rho}}{\lambda}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$\Rightarrow E[r] = \frac{m\rho}{\lambda} + \frac{\frac{\rho . \sigma}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{m . \frac{\cancel{\lambda}}{m\mu}}{\cancel{\lambda}} + \frac{\frac{\sigma . \cancel{\lambda}}{m\mu(1-\rho)}}{\cancel{\lambda}}$$

$$\Rightarrow E[r] = \frac{1}{\mu} + \frac{\frac{\sigma}{m\mu}}{(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E[r] = \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\sigma}{m(1-\rho)}\right]}$$

E o Tempo médio de Espera?

De forma análoga:

$$E[nq] = \lambda \cdot E[w]$$

nº médio de tarefas na fila — tempo médio de espera

$$\Rightarrow E[w] = \frac{E[nq]}{\lambda} = \frac{\sigma \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)}}{\lambda} =$$

$$\frac{\sigma \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{m\mu}}{\cancel{\lambda} \cdot (1-\rho)} \Rightarrow \boxed{E[w] = \frac{\sigma}{m\mu(1-\rho)}}$$

Em Fila M/M/m, quando $\lambda \leq m\mu$

a VAZÃO = λ

Quando $\lambda > m\mu$, a VAZÃO = $m\mu$