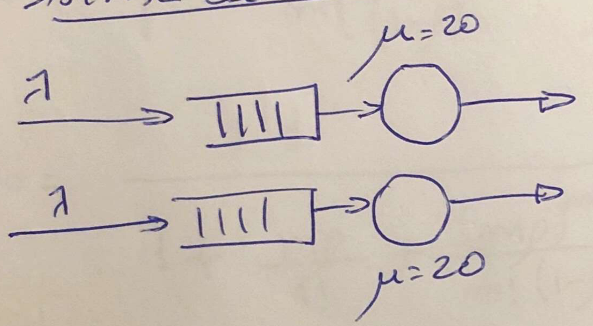
Exemplo 1: (Simulação JSIM)

Comparar os seguintes sistemas de filas, considerando Tempo Médio de Espera e Tempo Médio de Resposta.

A taxa de atendimento de tarefas é 40 tarefas/seg distribuída uniformemente entre os servidores.

Todos os sistemas possuem filas com capacidade infinita e distribuições exponencial da taxa de chegada e taxa de atendimento.

a) Sistema Dedicado



$\lambda = 10$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5$

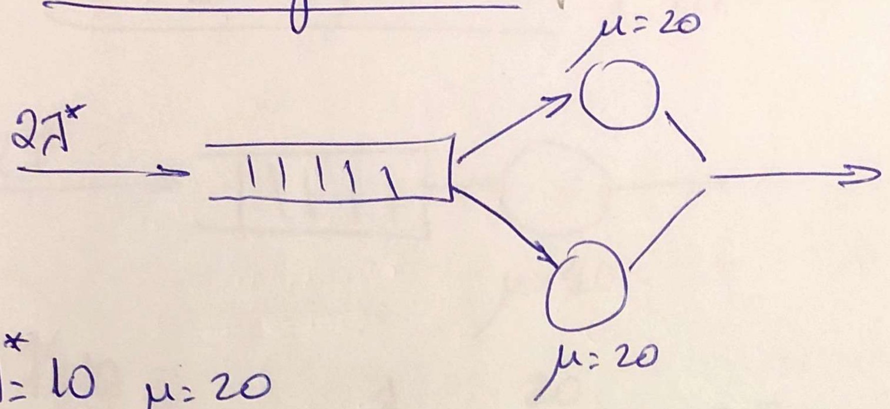
$$E[w] = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} \cdot \rho = \frac{\frac{1}{20}}{\cancel{0{,}5}} \cdot \cancel{0{,}5}$$

$$\boxed{E[w] = 0{,}05 \text{ seg}}$$

$$E[r] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{20}}{0{,}5} \Rightarrow E[r] = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{E[r] = 0{,}1 \text{ seg}}$$

b) Sistema Compartilhado (Simulação JSIM)



$\lambda^* = 10 \quad \mu = 20$

$$E[w] = \frac{\sigma}{m\mu(1-\rho)} \qquad \underline{m=2}$$

$$\sigma = p_0 \cdot \frac{(m.\rho)^m}{m!\,(1-\rho)} \qquad \rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{20}{2.20} = 0{,}5$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{m\rho}{1!} + \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}} = \frac{1}{\underbrace{1 + 1 + \frac{1}{2.0{,}5}}} = \frac{1}{3}$$

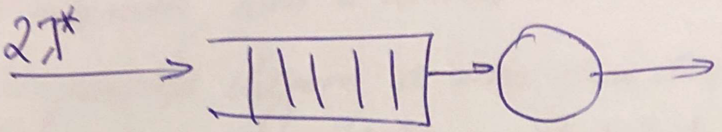
$$\sigma = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2!\,(0{,}5)} \longrightarrow \sigma = \frac{1}{3}$$

$$E[w] = \frac{1/3}{2.20.0{,}5} = \frac{1}{60} \qquad \boxed{E[w] = 0{,}0167 \text{ seg}}$$

$$E[r] = \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\sigma}{m(1-\rho)}\right] = \frac{1}{20}\left[1 + \frac{1/3}{2.0{,}5}\right]$$

$$E[r] = \frac{1}{20}\left[1 + \frac{1}{3}\right] = \frac{4}{20.3} = \frac{1}{15} \qquad \boxed{E[r] = 0{,}0667}$$

c) Sistema com Super Servidor (simulação JSIM)



$\mu = 40$

$\lambda^* = 10$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{20}{40} = 0{,}5$$

$$E[w] = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} \cdot \rho = \frac{\frac{1}{40}}{0{,}5} \cdot 0{,}5$$

$$\boxed{E[w] = 0{,}025 \text{ seg}}$$

$$E[r] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{40}}{1-0{,}5} = \frac{1}{20}$$

$$\boxed{E[r] = 0{,}05 \text{ seg}}$$

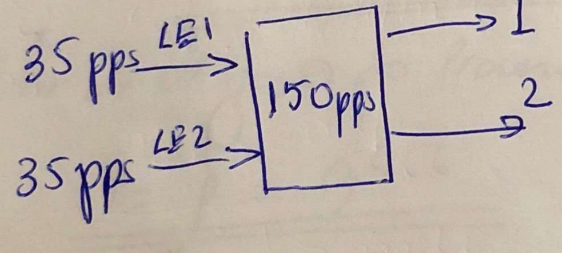
Obs: não é redundante!

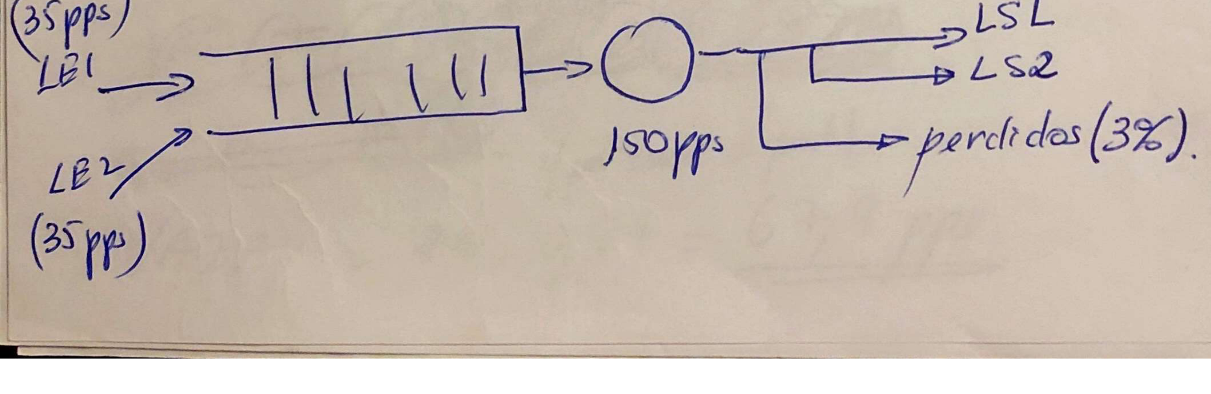
Exemplo 5: (SIMULAÇÃO JSIM)

Seja um roteador IP que possui somente um processador, com 2 linhas de entrada e 2 de saída. Os pacotes chegam a uma taxa de 35 pps em cada linha de entrada (LE1 e LE2) distribuídos exponencialmente.

O processador é capaz de processar os pacotes (filtragem, comutação e transmissão) a uma taxa de 150 pps distribuídos exponencialmente.

Os pacotes filtrados com problema perfazem 3% dos pacotes comutados. Faça o modelo do roteador por meio de Sistemas de Filas e calcule os seguintes indicadores de desempenho: número médio de clientes, tempo médio de resposta, tempo médio na fila, taxa de utilização do processador, vazão.





- Número médio de pacotes:

$$E[n] = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{70}{150} = 0,466$$

$$E[n] = \frac{0,466}{1-0,466} \qquad \underline{\underline{E[n] = 0,873}}$$

- Tempo Médio de Resposta:

$$E[r] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{150}}{1-0,466} = \frac{\frac{1}{150}}{0,534}$$

$$\underline{\underline{E[r] = 0,0125\,seg}}$$

- Tempo Médio na Fila:

$$E[w] = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)} \cdot \rho = 0,0125 \cdot 0,466$$

$$\underline{\underline{E[w] = 0,005825\,seg}} \quad (5,825 \cdot 10^{-3})$$

- Fator de Utilização do Processador:

$$\underline{\underline{U = \rho = 0,466}}$$

(por causa de perda)

- $\text{VAZÃO} = 70 \cdot 0,97 = \underline{\underline{67,9\ pps}}$

Exemplo 6: (Simulação JSIM)

Estudantes chegam ao centro de computação da universidade conforme regra de Poisson com uma taxa média de 10 estudantes por hora. Cada estudante passa em média 20 minutos num terminal, exponencialmente distribuído. O centro possui 5 terminais. Alguns estudantes reclamam que o tempo de espera é muito longo. Analisar o caso por meio do modelo de fila M/M/5, calculando os seguintes parâmetros: intensidade de tráfego; probabilidade dos terminais vazios; probabilidade de todos terminais ocupados; taxa de utilização média de cada terminal; número médio de estudantes no centro; número médio de estudantes na fila; número médio de estudantes usando os terminais; tempo médio do estudante no centro; tempo médio do estudante na fila.

• Intensidade de Tráfego:

$$\rho = \frac{\lambda}{m.\mu}$$

$$\lambda = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ estudantes/minuto} = 0{,}1667 \qquad m = 5$$

$$\mu = \frac{1}{20\text{min}} \text{ em cada terminal}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{6}}{5 \cdot \frac{1}{20}} = \frac{4}{6} \quad \rho = 0,67$$

- Probabilidade dos Terminais Vazios

$$p_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m.\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}\right]}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + m.\rho + \frac{(m\rho)^2}{2} + \frac{(m\rho)^3}{6} + \frac{(m\rho)^4}{24} + \frac{(m\rho)^5}{120 \cdot 0,33}}$$

$$m.\rho = 5 \cdot 0,67 = 3,35$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3,35 + 5,61 + 6,266 + 5,247 + 10,65}$$

$$p_0 = \frac{1}{32,123} \quad p_0 = 0,0311$$

- probabilidade de todos terminais ocupados.

$$\sigma = p_0 \cdot \frac{(m.\rho)^m}{m!\,(1-\rho)} = 0,0311 \cdot \frac{(3,35)^5}{120 \cdot 0,33}$$

$$\sigma = 0,33$$

- taxa de utilização média de cada terminal

$$\rho = 0{,}67$$

- Número Médio de Estudantes no Centro:

$$E[n] = \sigma \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)} + m \cdot \rho$$

$$E[n] = 0{,}33 \cdot \frac{0{,}67}{0{,}33} + 5 \cdot 0{,}67$$

$$E[n] = 0{,}67 + 3{,}35 \Rightarrow E[n] = 4{,}02$$

- Número Médio de Estudantes na Fila:

$$E[n_q] = \sigma \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)} = 0{,}67$$

- Número médio de Estudantes Usando os terminais:

$$E[n_s] = E[n] - E[n_q] = 4{,}02 - 0{,}67$$

$$E[n_s] = 3{,}35$$

- Tempo Médio de Estudantes no Centro:

$$E[r] = \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\sigma}{m(1-\rho)}\right]$$

$$E[r] = \frac{1}{\frac{1}{20}}\left[1 + \frac{0{,}33}{5(1-0{,}67)}\right]$$

$$E[r] = 20\left(1 + \frac{1}{5}\right) \qquad \underline{E[r] = 24 \text{ min}}$$

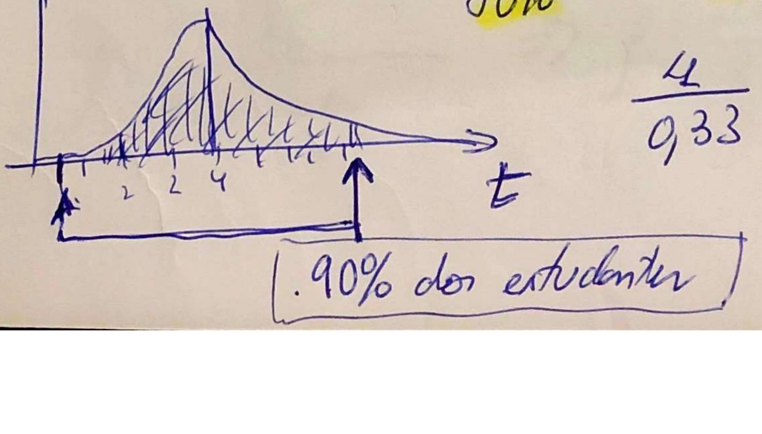
- Tempo médio de Estudantes na Fila.

$$E[w] = \frac{\sigma}{m \cdot \mu (1-\rho)} = \frac{0{,}33}{5 \cdot \frac{1}{20} \cdot (1-0{,}67)}$$

$$\underline{E[w] = 4 \text{ min}}$$

Com relação ao tempo de espera médio

$E[w] = 4$ min



$$90\% \rightarrow \frac{E[w]}{\sigma} \cdot \ln(10\sigma) =$$

$$\frac{4}{0{,}33} \cdot \ln 3{,}3 = \underline{14{,}47 \text{ min}}$$

Ou seja, 10% dos estudantes devem esperar mais que 14,47min.

Exemplo 7: Continuando o exemplo anterior, os estudantes gostariam de limitar o tempo de espera em média a 2 minutos e não mais de 5 minutos em 90% dos casos.

Como resolver? $m = 6$? $\lambda = 1/6$

$$E[\omega] = \frac{\sigma}{m.\mu.(1-\rho)} \qquad \mu = \frac{1}{20} \qquad \rho = \frac{\lambda}{m.\mu}$$

$$\rho = \frac{1/6}{6 \cdot \frac{1}{20}} \Rightarrow \rho = \frac{20}{36} \Rightarrow \rho = 0,555$$

$$\sigma = p_0 \cdot \frac{(m\rho)^m}{m!\,(1-\rho)}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + m\rho + \frac{(m\rho)^2}{2} + \frac{(m\rho)^3}{6} + \frac{(m\rho)^4}{24} + \frac{(m\rho)^5}{120} + \frac{(m\rho)^6}{720 \cdot \underbrace{(1-\rho)}_{0,445}}}$$

$$m\rho = 6 \cdot 0,555 = 3,33$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 3,33 + 5,54 + 6,15 + 5,12 + 3,41 + 4,256}$$

$$p_0 = \frac{1}{28,806} \qquad \underline{p_0 = 0,0347}$$

$$\sigma = 0,0347 \cdot \frac{(3,33)^6}{720 \cdot 0,445} \qquad \underline{\underline{\sigma = 0,148}}$$

$$E[w] = \frac{0,148}{6 \cdot \frac{1}{20} \cdot \underbrace{(1-0,555)}_{0,445}} \Rightarrow \underline{\underline{E[w] = 1,1\,\text{min}}}$$

$$\cancel{90\%\,E[w] = \frac{\sigma(2-\sigma)}{m^2\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{0,148(2-0,148)}{\frac{36}{400} \cdot \underbrace{(1-0,555)^2}_{0,445}}}$$

$$\cancel{= 0,3042 \cdot (2-0,148)}$$

$$\cancel{\Rightarrow 90\%\,E[w] =}$$

$$90\% E[w] = \frac{E[w]}{\sigma} \cdot \ln(10\sigma)$$

$$= \frac{1,1}{0,148} \cdot \ln(1,48) \Rightarrow \underline{\underline{90\% E[w] = 2,91 \text{ min}}}$$

Desta forma, com apenas mais um terminal atendemos às solicitações dos estudantes.

Exemplo 8: Suponha que, no caso do Exemplo 6, os 5 terminais estivessem em locais diferentes exigindo filas separadas para cada terminal. Como ficaria o desempenho?

Neste caso o sistema pode ser modelado como filas separadas M/M/1.

A taxa de chegada seria: $\lambda^* = \frac{\lambda}{5} = \frac{1/6}{5} = \underline{0,0333}$
(distribuição uniforme).

$\mu = \frac{1}{20} = 0,05.$

$$\rho = \frac{\lambda^*}{\mu} = \frac{0,0333}{0,05} \quad \underline{\rho = 0,67}.$$

$$E[r] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{0,05}}{1-0,67} \Rightarrow \underline{\underline{E[r] = 60,6 \text{ min}}}$$

Programa JMT

O programa JMT é uma plataforma para resolver ou simular sistemas de filas ou redes de filas. Quando as distribuições são exponenciais e as filas são ilimitadas o programa JMT pode resolver as filas de forma analítica.

Quando as distribuições não são exponenciais e/ou as filas são limitadas em capacidade o programa JMT utiliza a simulação de eventos discretos para resolver esses sistemas ou redes de filas.