LIMITES E DERIVADAS - PARTE 3

RICARDO BIANCONI

1. Introdução

Já vimos que a derivada de uma função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, em um ponto $x \in \mathrm{Dom}(f)$ é o limite

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

e já calculamos vários desses limites. No entanto, quando as espressões da função f forem mais complexas, esses limites podem tornar-se bem complicados. Para isso, temos uma tabela de funções básicas e regras para determinar derivadas de funções mais complexas obtidas por somas, produtos, quocientes e a Regra da Cadeia (para composições de funções).

Uma propriedade importante de funções deriváveis é:

Proposição 1. Se a função $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ for derivávelem $x \in \mathrm{Dom}(f)$, então ela será contínua em x.

Demonstração. A função f será derivável em $x \in \mathrm{Dom}(f)$ se existir o limite $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$. Daí, temos

$$\lim_{t \to 0} f(x+t) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} [f(x+t) - f(x)] = 0,$$

mas, como f é derivável em x,

$$\lim_{t \to 0} [f(x+t) - f(x)] = \lim_{t \to 0} t \times \left[\frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right] = 0 \times f'(x) = 0.$$

$\square$

Date: 2023.

2. Propriedades das Derivadas

Começamos com uma tabela de derivadas de algumas funções conhecidas.

$\boldsymbol{f(x)}$	c	x	x^a	e^x	$\ln x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\boldsymbol{f'(x)}$	0	1	ax^{a-1}	e^x	x^{-1}	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

Tabela 1. Tabela de derivadas. Na primeira linha estão as funções e na segunda suas derivadas. A letra c na primeira linha refere-se a uma função constante igual a um número $c \in \mathbb{R}$.

As primeiras propriedades referem-se às operações de soma, produto e quociente.

Proposição 2. Se as funções f e g forem deriváveis em x e $c \in \mathbb{R}$ for uma constante, então:

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
(b) $(cf)'(x) = c\, f'(x)$ (podemos tirar a constante c em evidência);
(c) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
(d) $\displaystyle \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Demonstração. As duas primeiras propriedades são imediatas, a partir das propriedades de somas e multiplicação por constantes em limite.

A terceira propriedade, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, exige mais argumentação:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x+t) + f(x)g(x+t) - f(x)g(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{[f(x+t) - f(x)]g(x+t) + f(x)[g(x+t) - g(x)]}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{[f(x+t) - f(x)]g(x+t)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{f(x)[g(x+t) - g(x)]}{t} =$$

$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, pois no primeiro limite a função g é contínua em x, por ser derivável em x.

A quarta propriedade tem argumentação parecida.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{f(x+t)}{g(x+t)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\frac{f(x+t)g(x)-f(x)g(x+t)}{g(x+t)g(x)}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{[f(x+t)-f(x)]g(x)}{g(x+t)g(x)}\right)-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{f(x)[g(x+t)-g(x)]}{g(x+t)g(x)}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{g(x)}{g(x+t)g(x)}\left(\frac{[f(x+t)-f(x)]g(x)}{t}\right)-$$

$$-\lim_{t\to 0}\frac{f(x)}{g(x+t)g(x)}\left(\frac{f(x)[g(x+t)-g(x)]}{t}\right)=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)}{[g(x)]^2}-\frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2},$$

onde novamente usamos a continuidade de g, e também a de f, em x. □

Vamos aplicar essas regras em alguns exemplos.

Exemplo 1 (Derivadas de Polinômios)**.** A derivada de $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 - x + 12$ é $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 12x - 1$. Aqui usamos as propriedades da soma (várias vezes) e de multiplicação por constantes (também várias vezes)

Exemplo 2 (Derivadas de funções Racionais)**.** A derivada de $f(x) = \dfrac{x^2-6x}{x^3+x^2+13x+25}$ é

$$f'(x)=\frac{(2x-6)(x^3+x^2+13x+25)-(x^2-6x)(3x^2+2x+13)}{(x^3+x^2+13x+25)^2}$$

Exemplo 3. Vejamos algumas derivadas de produtos de funções.

1. $(xe^x)' = (x+1)e^x$
2. $(x\,\mathrm{sen}\,x)' = x\cos x + \mathrm{sen}\,x$
3. $(e^x\,\mathrm{sen}\,x)' = e^x(\mathrm{sen}\,x + \cos x)$
4. $(e^x\cos x)' = e^x(\cos x - \mathrm{sen}\,x)$
5. $(x\ln x)' = 1 + \ln x$
6. $(x^2\ln x)' = x(1 + 2\ln x)$
7. $(xe^x\,\mathrm{sen}\,x)' = e^x\,\mathrm{sen}\,x + x(e^x\,\mathrm{sen}\,x)' = e^x(2\,\mathrm{sen}\,x + \cos x)$

3. Composição de Funções e a Regra da Cadeia

Uma operação para obter novas funções a partir de funções conhecidas é a composição de funções.

Definição 1 (Composição)**.** Dadas duas funções $f : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R}$, podemos definir a função $f \circ g : \mathrm{Dom}(f \circ g) \to \mathbb{R}$, por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, com $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{Dom}(g), \text{ e } g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$.

Exemplo 4. Para reconhecermos as diversas composições de funções, veja a tabela a seguir

$\boldsymbol{f(x)}$	x^a	e^x	$\ln x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$\boldsymbol{(f \circ g)(x)}$	$[g(x)]^a$	$e^{g(x)}$	$\ln[g(x)]$	$\operatorname{sen}(g(x))$	$\cos[g(x)]$	$\operatorname{tg}[g(x)]$

Tabela 2. Composição das funções $f(x)$ indicadas com uma função (ou expressão) $g(x)$.

Exemplo 5. Para reconhecermos as diversas composições de funções, agora com a função $g(x) = x^2 + 1$, veja a tabela a seguir

$\boldsymbol{f(x)}$	x^a	e^x	$\ln x$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
$\boldsymbol{(f \circ g)(x)}$	$[x^2+1]^a$	e^{x^2+1}	$\ln[x^2+1]$	$\operatorname{sen}(x^2+1)$	$\cos[x^2+1]$	$\operatorname{tg}[x^2+1]$

Tabela 3. Composição das funções $f(x)$ indicadas com uma função (ou expressão) $g(x) = x^2 + 1$.

Assim, se $a = 1/2$, $(x^2+1)^{1/2} = \sqrt{x^2+1}$.

Exemplo 6. A função 2^x é a composição $e^{x \ln 2}$, onde $f(x) = e^x$ e $g(x) = x \ln a$. Já, a função $\log_{10} x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ é uma simples multiplicação da função $\ln x$ pela constante $1/(\ln 10)$.

Proposição 3 (Regra da Cadeia)**.** A derivada da função composta $f \circ g$ é $(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x)$ (a composta da derivada de f com a função g, vezes a derivada de g).

$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$	$[g(x)]^a$	$e^{g(x)}$	$\ln g(x)$	$\operatorname{sen} g(x)$	$\cos g(x)$
$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'$	$a[g(x)]^{a-1}g'(x)$	$e^{g(x)}g'(x)$	$[g(x)]^{-1}g'(x)$	$[\cos g(x)]g'(x)$	$-[\operatorname{sen} g(x)]g'(x)$

Tabela 4. Tabela de derivadas de algumas funções compostas. Na primeira linha estão as funções e na segunda suas derivadas.

Exemplo 7. Façamos a mesma tabela,mas agora com a função $g(x) = 3x^2$, cuja derivada é $g'(x) = 6x$:

$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$	$[3x^2]^a$	e^{3x^2}	$\ln(3x^2)$	$\operatorname{sen}(3x^2)$	$\cos(3x^2)$
$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'$	$a[3x^2]^{a-1}6x$	$e^{3x^2}6x$	$[3x^2]^{-1}6x$	$[\cos(3x^2)]6x$	$-[\operatorname{sen}(3x^2)]6x$

Tabela 5. Tabela de derivadas de algumas funções compostas. Na primeira linha estão as funções e na segunda suas derivadas.

Exemplo 8. Se $f(x) = \ln|x|$, então $f'(x) = x^{-1}$, pois

(a) se $x > 0$, então $f(x) = \ln x$ e, assim, $f'(x) = x^{-1}$;
(b) se $x < 0$, então $f(x) = \ln(-x)$ (a composição de $\ln x$ com a função $|x| = -x$, cuja derivada é -1) e, assim, $f'(x) = (-x)^{-1}(-1) = x^{-1}$.

4. Funções Trigonométricas Inversas

Introduzimos duas novas funções elementares, a inversa da tangente e a do seno.

Definição 2 (Arcotangente)**.** Lembramos que $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(y + n\pi)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $-\pi/2 < y < \pi/2$. A função arcotangente é a resposta à pergunta "*qual é o arco y, cuja tangente é x?*" Como não existe uma resposta única, precisamos impor mais uma condição: $\operatorname{arctg} x =$ o arco y, tal que $-\pi/2 < y < \pi/2$ e $\operatorname{tg} y = x$.

Observação 1 (Derivada do Arcotangente)**.** Seu gráfico é a reflexão do gráfico da tangente pela reta $y = x$. Em particular, como a função tangente é derivável em todos os pontos de seu domínio, ele possui retas tangentes em todos esses pontos e, portanto, o gráfico da função $\operatorname{arctg} x$ possui retas tangentes (é derivável) em todo $x \in \operatorname{Dom}(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}$. Sua imagem é o intervalo $\pi/2 < y < \pi/2$.

Calculamos sua derivada usando a Regra da Cadeia. Como $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$, derivamos os dois lados dessa equação, $\sec^2(\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg})'(x) = 1$. Dividimos os dois lados da igualdade $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ e obtemos $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$. Daí, temos

$$\sec^2(\operatorname{arctg} x)(\operatorname{arctg})'(x) = [1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)](\operatorname{arctg})'(x) = (1+x^2)(\operatorname{arctg})'(x) = 1,$$

ou seja, a derivada do arcotangente é

$$\frac{d \operatorname{arctg}}{dx}(x) = (\operatorname{arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Definição 3 (Arcosseno)**.** Lembramos que $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(y + 2n\pi)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, e $-\pi < y < \pi$. A função arcotangente é a resposta à pergunta "*qual é o arco y, cujo seno é x?*" Como não existe uma resposta única, precisamos impor mais uma condição: $\operatorname{arcsen} x =$ o arco y, tal que $-\pi/2 < y < \pi/2$ e $\operatorname{sen} y = x$. Seu domínio é o intervalo $-1 < x < 1$ e sua imagem é o intervalo $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Observação 2 (Derivada do Arcosseno)**.** O mesmo tipo de argumento acima, podemos afirmar que a função $\operatorname{arcsen} x$ é derivável em todo ponto de seu domínio. Calculamos sua derivada, onde fazemos $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$ e derivamos com a Regra da Cadeia. Observe que se $-\pi/2 < y < \pi/2$, etão $\cos y > 0$ e, portanto, $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$.

$$1 = [\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)]' = \cos(\operatorname{arcsen} x)(\operatorname{arcsen})'(x) =$$

$$= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)}(\operatorname{arcsen})'(x) = \sqrt{1 - x^2}(\operatorname{arcsen})'(x),$$

ou seja, a derivada do arcosseno é

$$\frac{d \operatorname{arcsen}}{dx}(x) = (\operatorname{arcsen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Exercícios

Q 1. Calcule as derivadas das funções abaixo:

1. $f(x) = x^2e^x$
2. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
3. $f(x) = x^3e^x \operatorname{sen} x$
4. $f(x) = (\operatorname{sen} x)(\operatorname{arctg} x)$
5. $f(x) = e^x \operatorname{arcsen} x$
6. $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$
7. $f(x) = 19^x$
8. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
9. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(12x)}{1 + \cos(15x)}$
10. $f(x) = \dfrac{\ln(5x + 2)}{5x + 2}$
11. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
12. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$
13. $f(x) = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$
14. $f(x) = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$

,

15. $f(x) = \operatorname{sen}(2^x + \operatorname{arctg}(\pi x))$
16. $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x \ln x)$

onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Respostas: (1) $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$; (2) $f(x) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$; (3) $f(x) = [(x^3 + 3x^2) \operatorname{sen} x + x^3 \cos x]e^x$; (4) $f'(x) = (\cos x)(\operatorname{arctg} x) + \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}$; (5) $f'(x) = e^x \operatorname{arcsen} x + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; (6) $f'(x) = 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x)$; (7) $f(x) = e^{x \ln 19}$ e $f'(x) = (\ln 19)19^x$; (8) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; (9) $f'(x) = \frac{12\cos(12x)[1+\cos(15x)]+15\operatorname{sen}(12x)\operatorname{sen}(15x)}{[1+\cos(15x)]^2}$ (tome cuidado com os sinais aqui); (10) $f'(x) = \frac{1-5\ln(5x+2)}{(5x+2)^2}$; (11)$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; (12) $f'(x) = \frac{4x^3-6x}{(x^2+1)^3}$ (perceba a simplificação aqui); (13) $f'(x) = a\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$; (14) $f'(x) = a\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$; (15) $f'(x) = \cos(2^x + \operatorname{arctg}(\pi x)) \times \left((\ln 2)2^x + \frac{\pi}{1+(\pi x)^2}\right)$; (16) $f'(x) = \frac{e^x(\ln x+1/x)}{\sqrt{1-(e^x \ln x)^2}}$.
