Cálculo III - Poli - 2023

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/~glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

3 de junho de 2023

Superfícies

Ideia Intuitiva

Uma *superfície* em $\mathbb{R}^3$ é um subconjunto “bidimensional” de $\mathbb{R}^3$.

Definição

Uma *superfície parametrizada* em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\sigma : A \to \mathbb{R}^3$, onde $A \subset \mathbb{R}^2$.

- Diz-se que σ é uma *parametrização* para sua imagem $\operatorname{Im} \sigma \subset \mathbb{R}^3$.
- É frequente usar a nomenclatura *superfície* para designar tanto “superfícies parametrizadas” como “subconjuntos bidimensionais de $\mathbb{R}^3$ ”, ficando o significado implícito pelo contexto.
- Diz-se que σ é *derivável* (resp. C^k) se for a restrição de uma aplicação derivável (resp. C^k) definida num aberto contendo A.

Superfícies Regulares

Definição

Sejam $\sigma = \sigma(u, v)$ uma superfície diferenciável definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $p \in \Omega$. Diz-se que σ é *regular* em p se $\mathrm{D}\sigma(p)$ for injetiva.

- A última condição é equivalente a dizer que $\partial_u\sigma(p)$ e $\partial_v\sigma(p)$ são linearmente independentes, i.e. $\partial_u\sigma(p) \times \partial_v\sigma(p) \neq 0$.
- Diz-se que σ é *regular* se o for em todo ponto de Ω.

Plano Tangente e Reta Normal

Definição

Sejam $\sigma = \sigma(u, v)$ uma superfície parametrizada diferenciável definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $S = \operatorname{Im} \sigma$ e $p \in \Omega$ tal que σ seja regular em p.

- O *plano tangente* a S em $\sigma(p)$ é o subespaço afim de $\mathbb{R}^3$ dado por $\sigma(p) + \operatorname{Im} \mathrm{D}\sigma(p)$.
- A *reta normal* a S em $\sigma(p)$ é a reta que passa por $\sigma(p)$ e é ortogonal ao plano tangente a S nesse ponto.

Observação

a) O subespaço vetorial subjacente ao plano tangente a S em $\sigma(p)$ é $\operatorname{Im} \mathrm{D}\sigma(p)$, que tem dimensão 2, por ser σ regular em p. Tal subespaço é gerado por $\partial_u \sigma(p)$ e $\partial_v \sigma(p)$.

b) Portanto, a reta normal a S em $\sigma(p)$ é a reta que passa por esse ponto na direção do vetor normal $\partial_u \sigma(p) \times \partial_v \sigma(p)$.

Área de Superfícies Parametrizadas

Definição

Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto com fronteira de medida nula e $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ uma superfície de classe C^1, injetiva no interior de K. Definimos a *área* de σ por

$$\iint_K \|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma\| \, \mathrm{d}A.$$

Chamamos $\mathrm{d}S = \|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma\| \, \mathrm{d}A$ de *elemento de área* da superfície.

Integrais de Superfície de Campos Escalares

Definição

Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto com fronteira de medida nula e $\sigma : K \to \mathbb{R}^3$ uma superfície de classe C^1, injetiva no interior de K. Seja f um campo escalar contínuo definido em $\operatorname{Im} \sigma$. Definimos a *integral de f em σ* por

$$\iint_\sigma f \,\mathrm{d}S := \iint_K f \circ \sigma \,\|\partial_u \sigma \times \partial_v \sigma\| \,\mathrm{d}A.$$

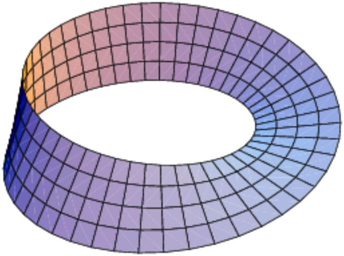
- Interpretando f como "densidade superficial", $\iint_\sigma f \,\mathrm{d}S$ é a "massa" da superfície.
- Podemos definir *centro de massa* e *momentos de inércia* de forma análoga aos casos já estudados no contexto de integrais duplas e triplas.

Orientabilidade

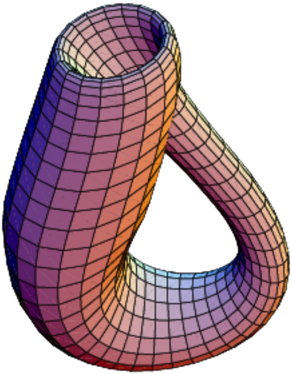
Definição

Diz-se que uma superfície $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ é *orientável* se existir um campo de vetores contínuo $n : \sigma \to \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $p \in \sigma$, $n(p)$ é ortogonal a σ e unitário.
Um tal campo normal unitário, caso exista, chama-se *orientação* de σ.

Faixa de Moebius



Garrafa de Klein



Integral de Superfície de um Campo de Vetores

Definição

Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície lisa por partes orientada pelo campo normal n e F um campo de vetores contínuo em σ. O *fluxo* de F em σ é definido por

$$\iint_{\sigma} \langle F, n \rangle \, \mathrm{d}S$$

Teorema de Gauss

Teorema

Sejam $B \subset \mathbb{R}^3$ um compacto com interior não vazio, cuja fronteira é uma superfície lisa por partes σ orientada pela normal exterior n. Seja F um campo vetorial de classe C^1 *definido num aberto contendo V. Então*

$$\iint_\sigma \langle F, n\rangle \, \mathrm{d}S = \int_B \mathrm{div}\ F \, \mathrm{d}V.$$

Interpretação Geométrica do Divergente

Exemplo

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1. Então, para todo $x \in \mathcal{U}$,

$$\operatorname{div}\, F(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}[B(x,r)]} \iint_{\partial B(x,r)} \langle F, n \rangle \, \mathrm{d}S,$$

onde n denota o campo normal exterior.

Teorema de Stokes

Teorema

Sejam $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de classe C^2 orientada pelo campo normal n, com bordo Γ munido da orientação induzida. Seja F um campo vetorial de classe C^1 definido num aberto que contenha σ. Então:

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}\Gamma = \iint_\sigma \langle \mathrm{rot}\ F, n \rangle \, \mathrm{d}S.$$

Interpretação Geométrica do Rotacional

Exemplo

Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1. Então, para todo $x \in \mathcal{U}$ e para todo $v \in \mathbb{R}^3$ unitário,

$$\langle \mathrm{rot}\ F(x), v \rangle = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathrm{area}\, D_r} \int_{\partial D_r} F \cdot \mathrm{d}r,$$

onde D_r denota o disco de centro x e raio r no plano que passa por x ortogonal a v, orientado por v e com bordo munido da orientação induzida.