MAT0334 - Quarta Lista de Exercícios

Duais e Biduais

1. Considere as funções $\varphi, \psi : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{K}$ definidas por
$$\varphi(f) = f(c) \quad \text{e} \quad \psi(f) = \int_a^b f(t)dt,$$
sendo $c \in [a,b]$ um ponto fixado. Mostre que φ e ψ são funcionais lineares contínuos e calcule suas normas.

2. Se $1 \leq p < \infty$, mostre que $\ell_p^* \equiv \ell_q$, onde q é o conjugado de p.

3. Mostre que se X^* for separável então X será separável. A recíproca é verdadeira? *Dica: Tome um conjunto enumerável denso em S_{X^*}. Para cada elemento φ_n deste conjunto, escolha $x_n \in S_X$ tal que $|\varphi_n(x_n)| > \dfrac{1}{2}$. Mostre que $\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} = X$.*

4. (*Convergência fraca*) Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço normado X *converge fracamente* para $x \in X$ se para cada $\varphi \in X^*$ a sequência de escalares $(\varphi(x_n))_n$ converge para $\varphi(x)$ em $\mathbb{K}$.

   (a) Mostre que toda sequência convergente em X é fracamente convergente, mas que a recíproca não é verdadeira.

   (b) Verifique que uma sequência $(x_n)_n = ((x_n^i)_i)_n$ em c_0 converge fracamente para $x = (x^i)_i$ então x_n^i converge para x^i em $\mathbb{K}$ para cada $i \in \mathbb{N}$.

   (c) Mostre que a recíproca do item anterior é verdadeira se supusermos $(x_n)_n$ limitada.

5. Caracterize os elementos de c_0^* que atingem sua norma. Mostre que o conjunto de tais funcionais é denso em c_0^*. *Isso é um caso particular do Teorema de Bishop-Phelps que diz que se X um espaço de Banach, o conjuntos dos elementos de X^* que atingem a norma é denso em X.*

6. (a) Verique que a aplicação $T \mapsto T^*$ é uma imersão isométrica de $\mathcal{L}(X;Y)$ em $\mathcal{L}(Y^*;X^*)$.
(b) Mostre que não pode existir um isomorfismo de $\mathcal{L}(\mathbb{K};c_0)$ sobre $\mathcal{L}(c_0^*;\mathbb{K}^*)$. Conclua que a imersão do item (a) nem sempre é sobrejetora, ou seja, existem operadores entre duais que não são adjuntos de ninguém.

7. Mostre que $L_\infty[0,1]$ contém uma cópia isométrica de ℓ_∞. Conclua que $L_\infty[0,1]$ não é reflexivo.

8. Se X é reflexivo e M é um subespaço fechado de X, mostre que X/M também é reflexivo. *Dica: Analise o dual*

9. Mostre que se existe uma aplicação linear contínua sobrejetora de um espaço reflexivo X sobre um espaço de Banach Y , então Y também é reflexivo.

10. Prove que um subconjunto A de um espaço normado é limitado se, e somente se, $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in X^*$. *Dica: Princício da Limitação Uniforme*