PEF3200
Aula 9
31 mai
prof. NAKAO

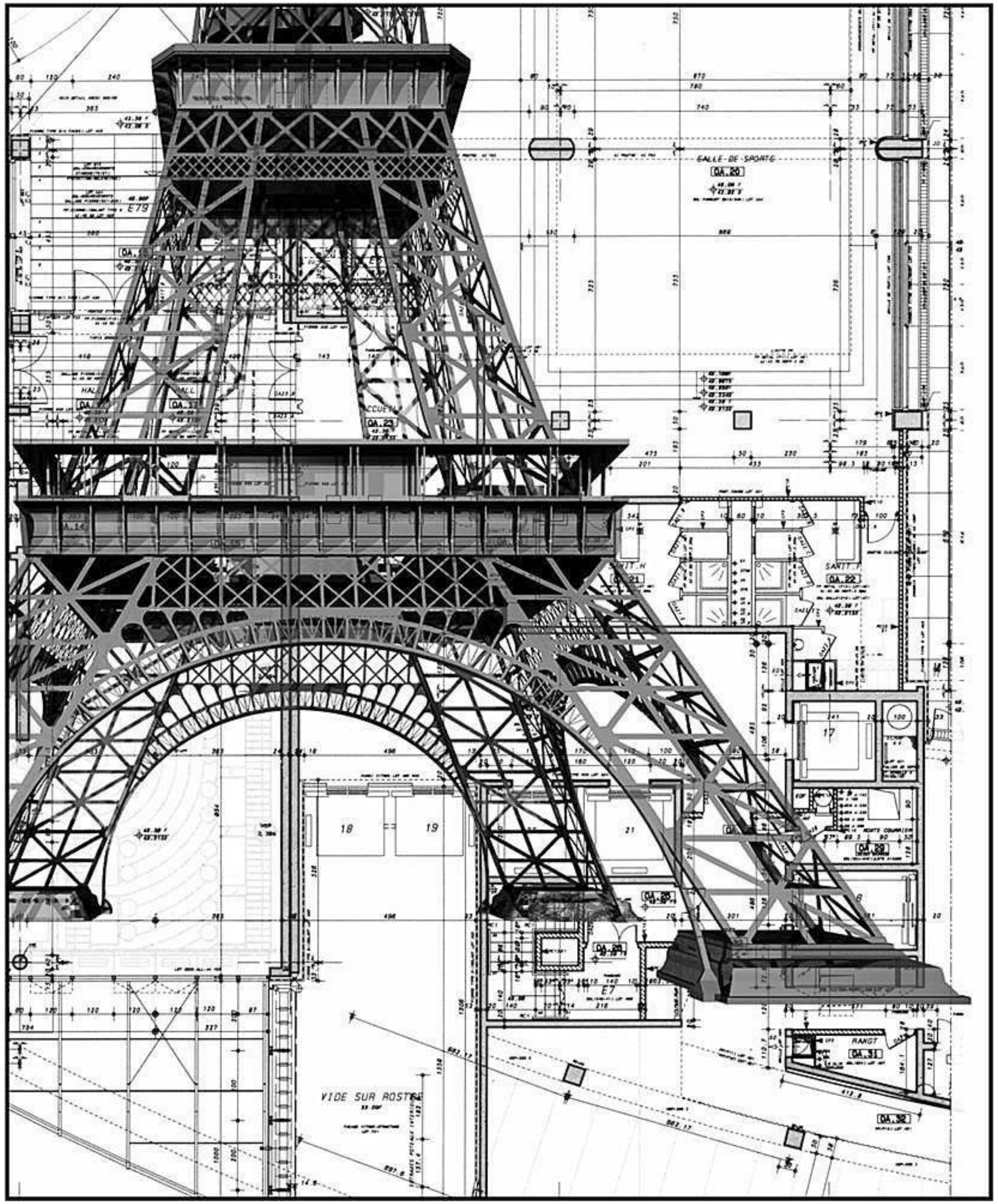
- Treliças.

AGENDA

7	10 mai	Linhas de influência.
8	**17 mai**	**Prova P1**
9	24 mai	Linhas de influência. Diagramas de máximos e mínimos.
10	31 mai	Treliças.
11	07 jun	Pórticos triarticulados.
12	14 jun	Arcos triarticulados.
13	21 jun	Vigas Gerber.
14	28 jun	Estruturas associadas.
15	**05 jul**	**Prova P2**
16	**12 jul**	**Prova Substitutiva**
17	**19 jul**	**Prova de Recuperação**

TRELIÇAS

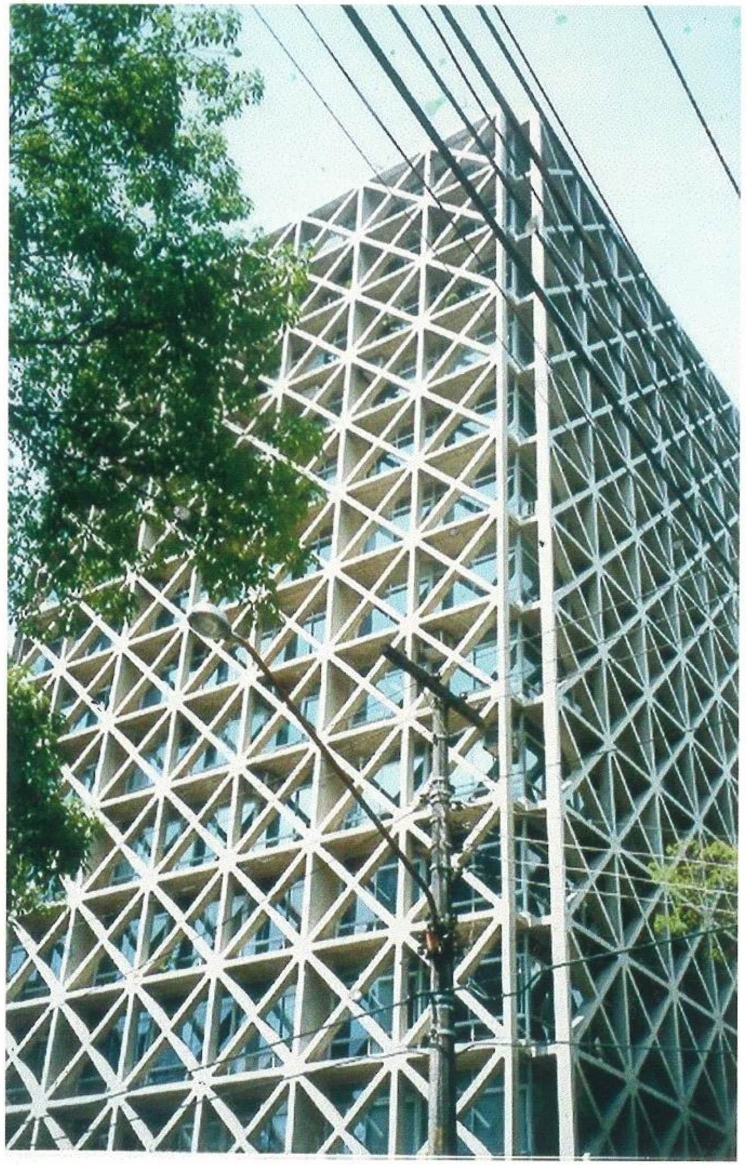
- **São estruturas reticuladas (formadas por barras)**
- **Todas as barras são articuladas nas duas extremidades**
- **Os carregamentos são aplicados apenas nos nós da estrutura**
- **As barras são solicitadas apenas por força normal, constante ao longo do seu eixo**
- **Principais classificações:**
  - **Disposição: Planas/espaciais**
  - **Formação: Simples/compostas/complexas**
- **Métodos de resolução**
  - **Método do Equilíbrio dos Nós**
  - **Método de Ritter**



Treliças planas são as que possuem os eixos de todas as suas barras em um mesmo plano, no qual também se situam todas as forças externas que as solicitam.

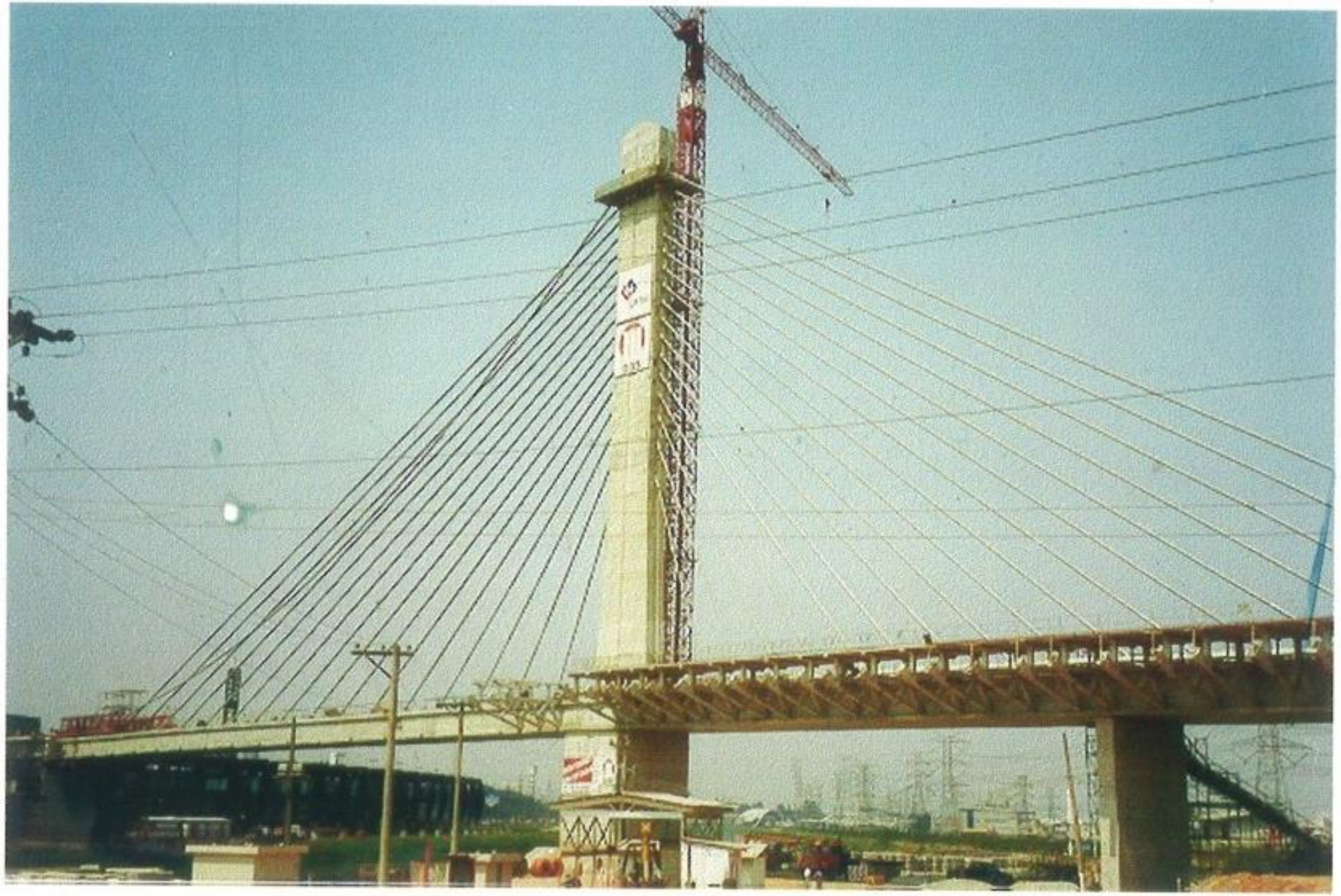
Treliças espaciais são as que não possuem os eixos de todas as suas barras situados em um mesmo plano.

Treliça de escoramento dos segmentos do tabuleiro da ponte
(fotografia de Anderson Glauco Benite)



Edifício Acal
(fotografia de Daniella Pinholi Cardoso)

Firth of Forth Bridge, 1889



Ponte estaiada sobre o rio Pinheiros
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Passarela sobre a Rodovia Raposo Tavares

Vista interior da passarela

Vista inferior da passarela

(fotografias de Anderson Glauco Benite)

Terminal Rodoviário Amador Aguiar

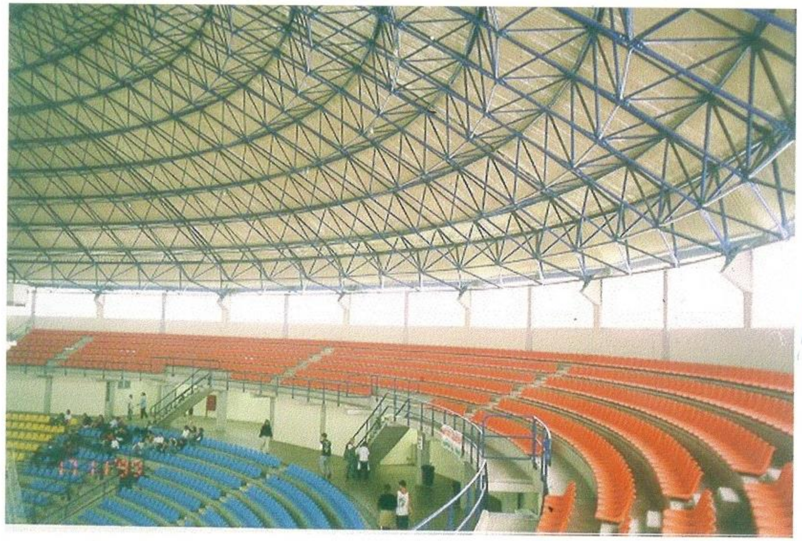
Cobertura
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Detalhe de um nó da treliça
(fotografia de Anderson Glauco Benite)

Cobertura da Estação Terminal Barra Funda do Metrô
(fotografia de André Hiroshi de Oliveira Nishina)

Detalhe de um nó da treliça
(fotografia de André Hiroshi de Oliveira Nishina)

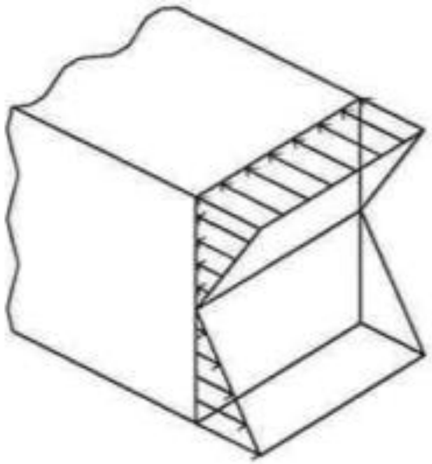
Cobertura do Ginásio Poliesportivo de São Bernardo do Campo

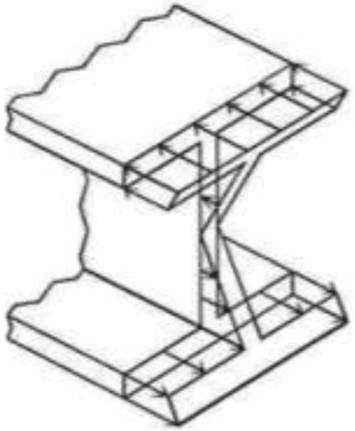


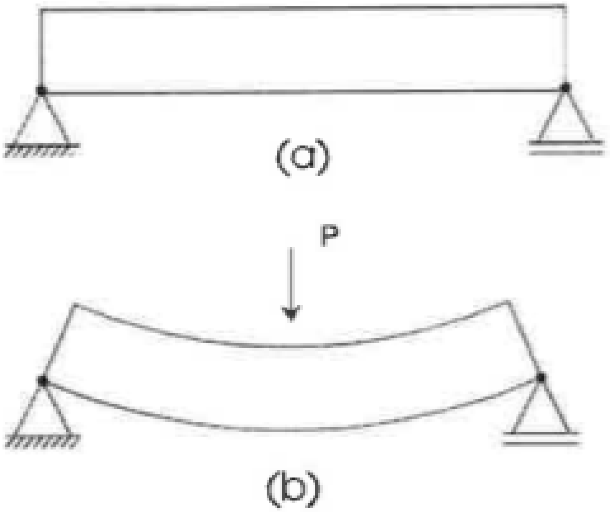
Detalhe dos apoios da cobertura
(fotografia de Nayra Tais Savordelli)

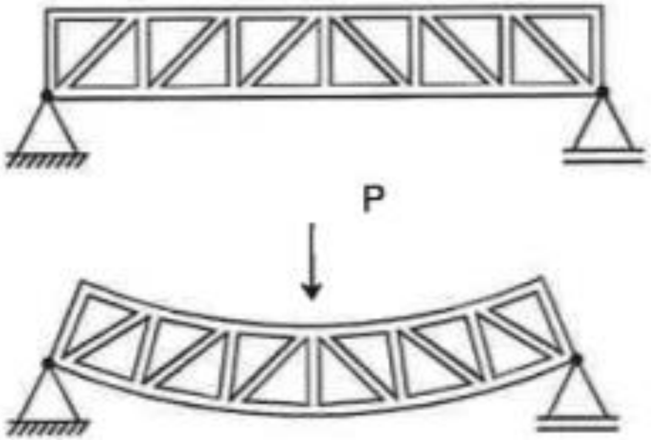
Detalhe de um dos apoios da cobertura
(fotografia de Nayra Tais Savordelli)

TRELIÇAS

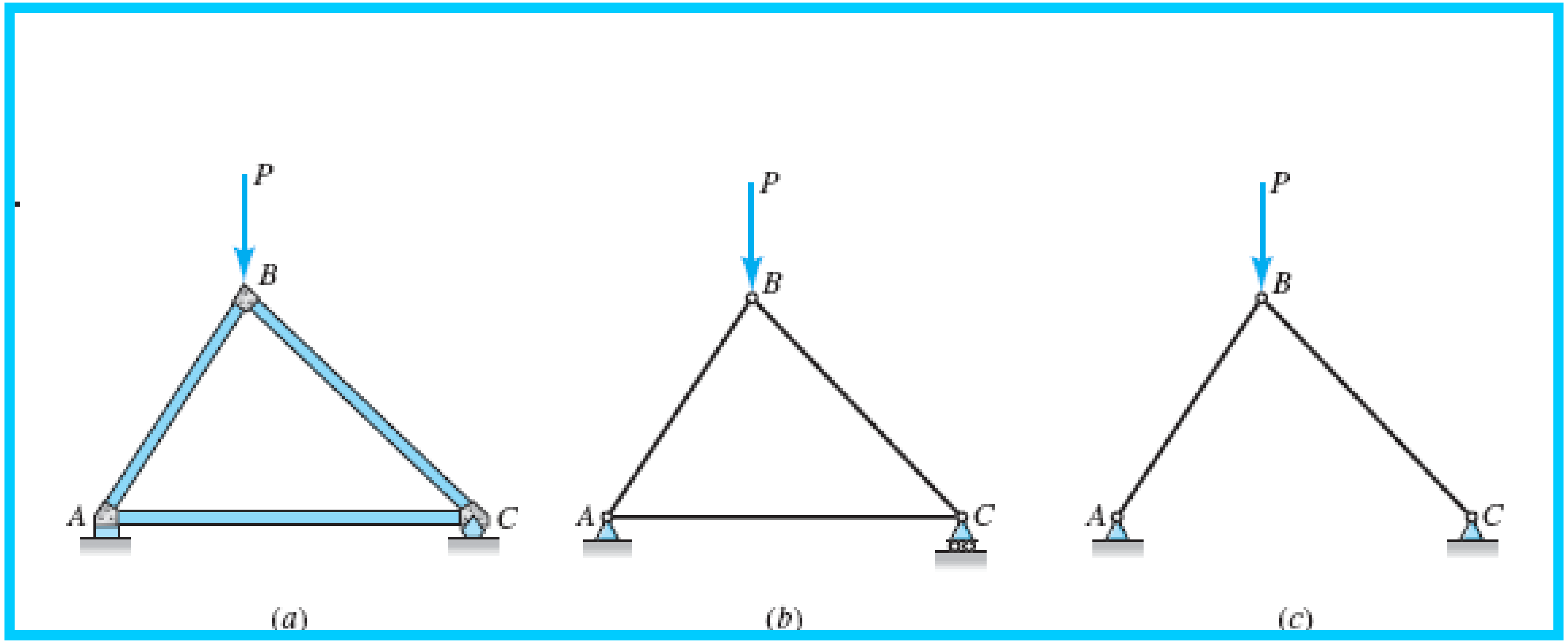


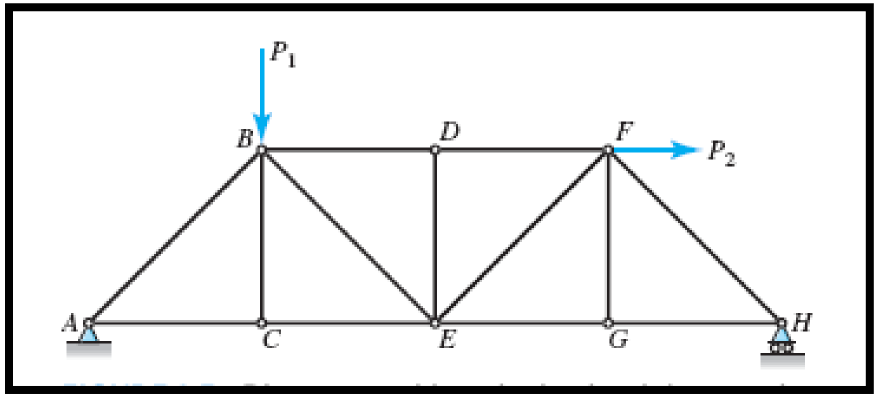






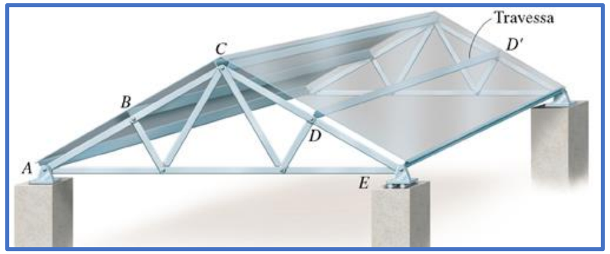
EXEMPLOS DE TRELIÇAS





TA **Philpot,** Missouri University of Science and Technology

TRELIÇAS: São estruturas formadas por barras ligadas por articulações que trabalham predominantemente sob a ação de forças normais.

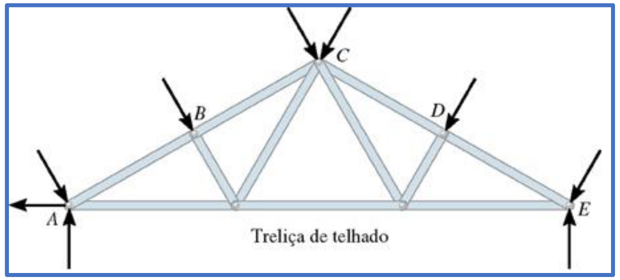


HIPÓTESES:

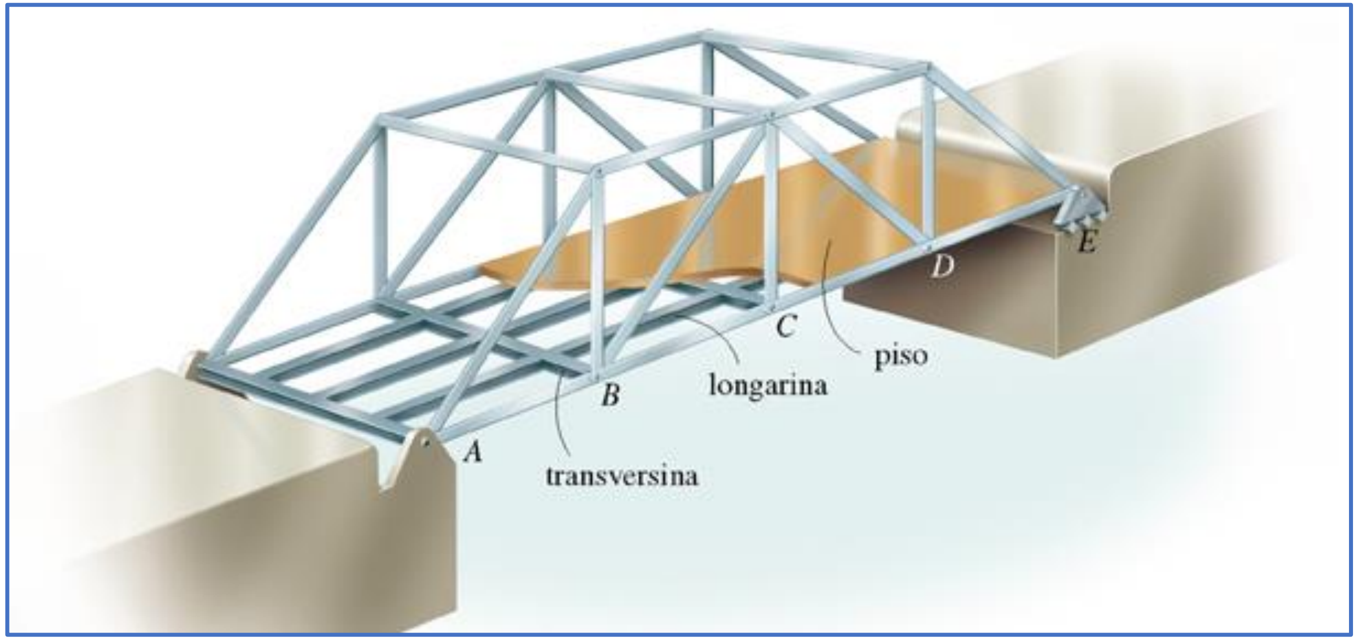
a) As barras se ligam aos nós por articulações perfeitas.

b) As cargas e as reações de vínculos aplicam-se apenas nos nós da treliça.

c) O eixo das barras coincide com a reta que une os nós.



Treliça de telhado

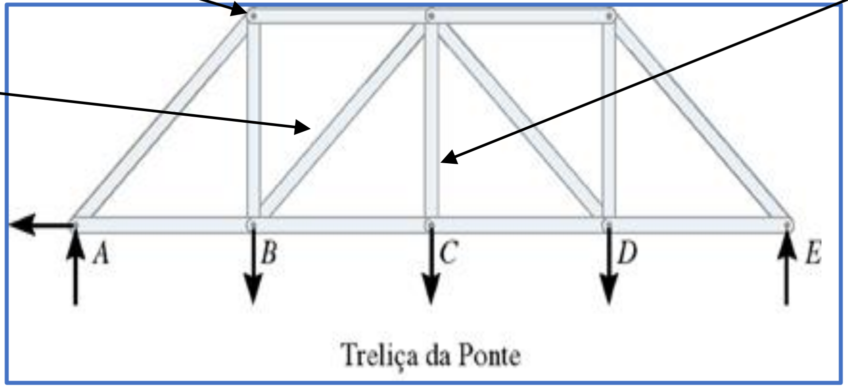


Nó

Banzo superior

Montante

Diagonal



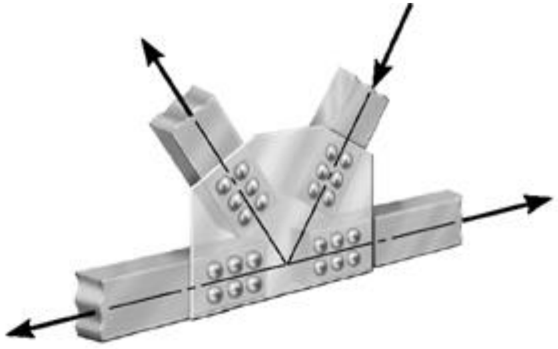
Banzo inferior

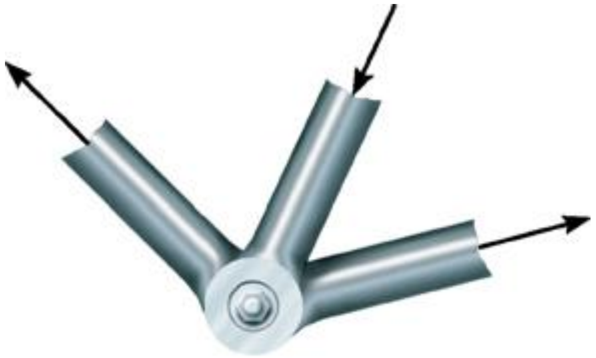
Na prática:

- **os nós não são articulações perfeitas;**

- **Pelo menos o peso próprio é uma carga aplicada ao longo do eixo das barras;**

- **Os esforços secundários gerados por essas divergências não são significativos.**



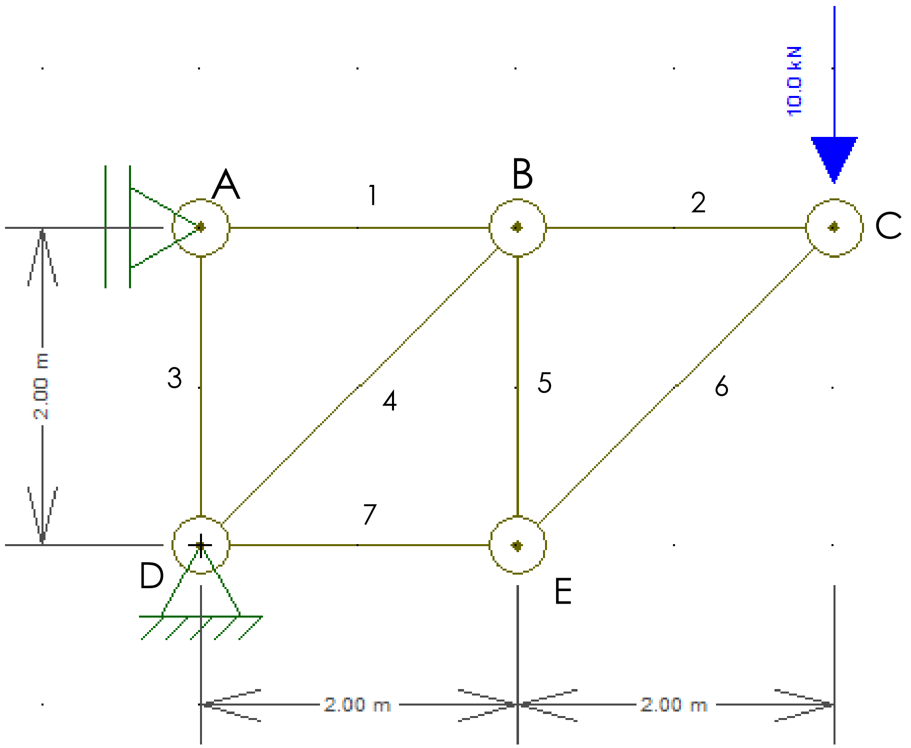


MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS NÓS

- **Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras**
- **Se a estrutura está em equilíbrio, então seus nós também estão em equilíbrio**
- **Apenas duas equações de equilíbrio podem ser aplicadas para cada nó, por ser articulado nas barras**
- **Em treliças simples isostáticas, é possível explicitar as incógnitas uma a uma pelo equilíbrio dos nós**
- **Procedimento:**
  - **Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido**
  - **Cálculo sucessivo dos esforços nas barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas**
  - **No final da resolução, surgem três equações de verificação**

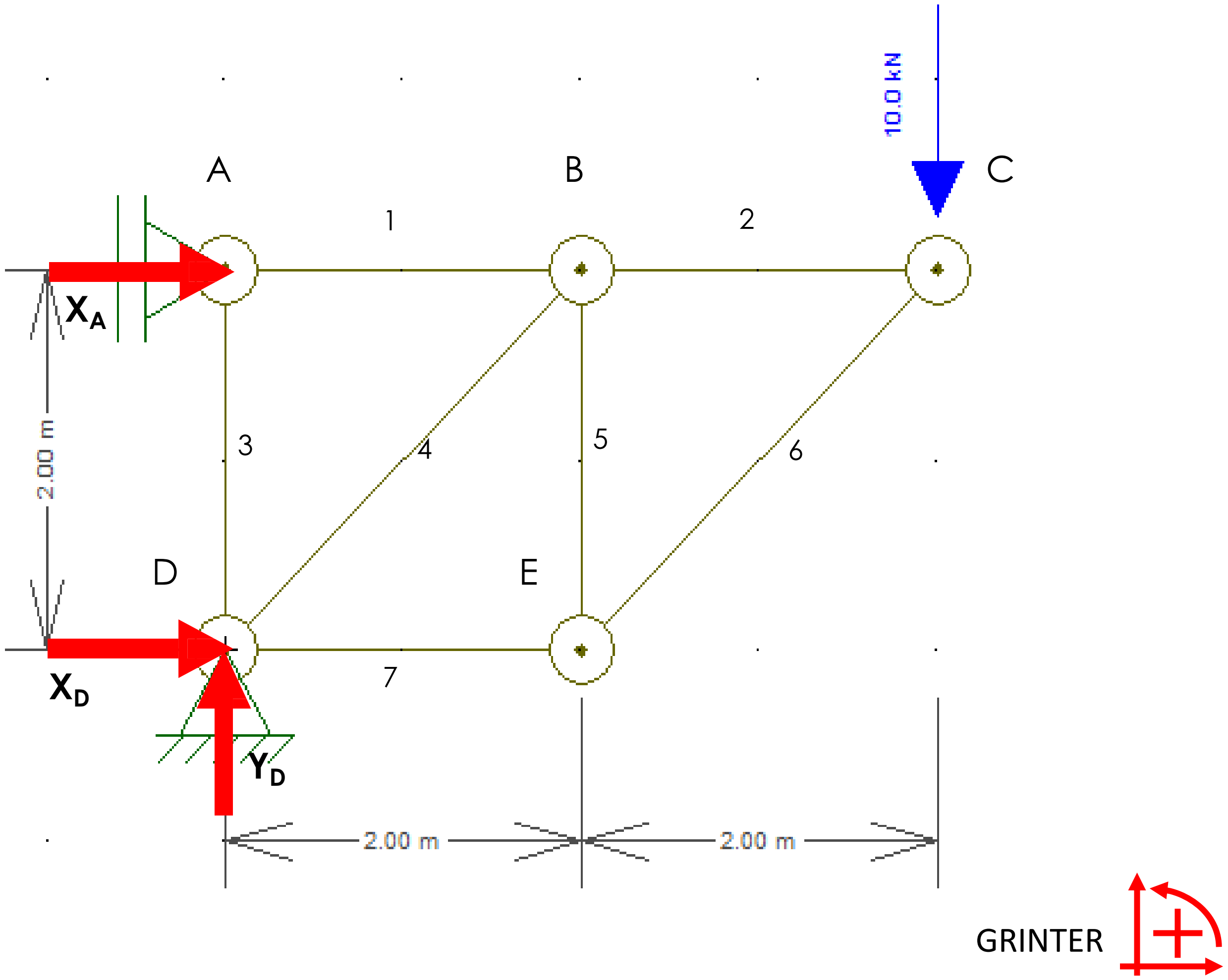
Para os nós: $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$



Exercício 1

Calcule os esforços nas barras da treliça.



Reações de apoio

$\Sigma\ F_y = 0$

$Y_D - 10 = 0$

$Y_D = 10\ kN$

$\Sigma\ M_D = 0$

$- X_A * 2 - 10 * 4 = 0$

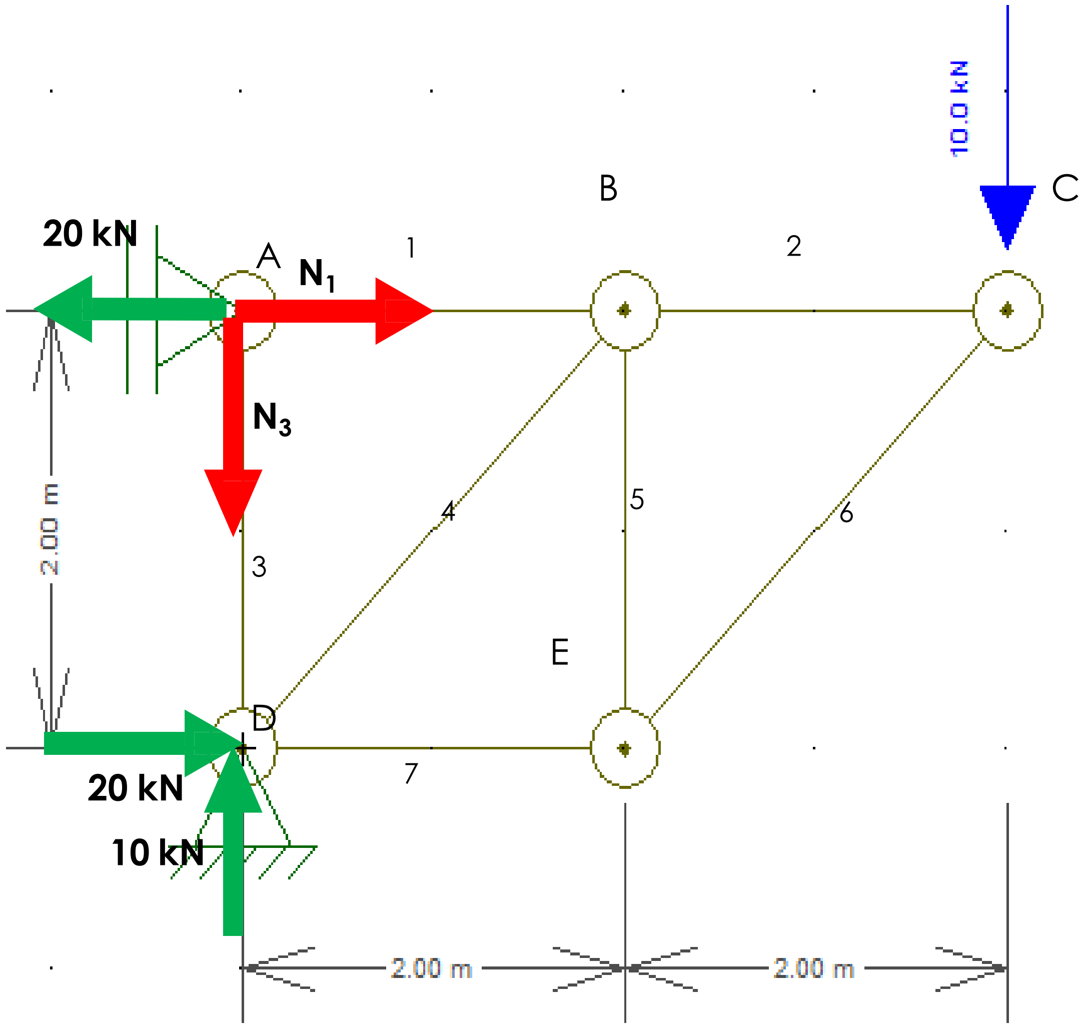
$X_A = - 20\ kN$

$\Sigma\ F_x = 0$

$X_A + X_D = 0$

$- 20 + X_D = 0$

$X_D = 20\ kN$

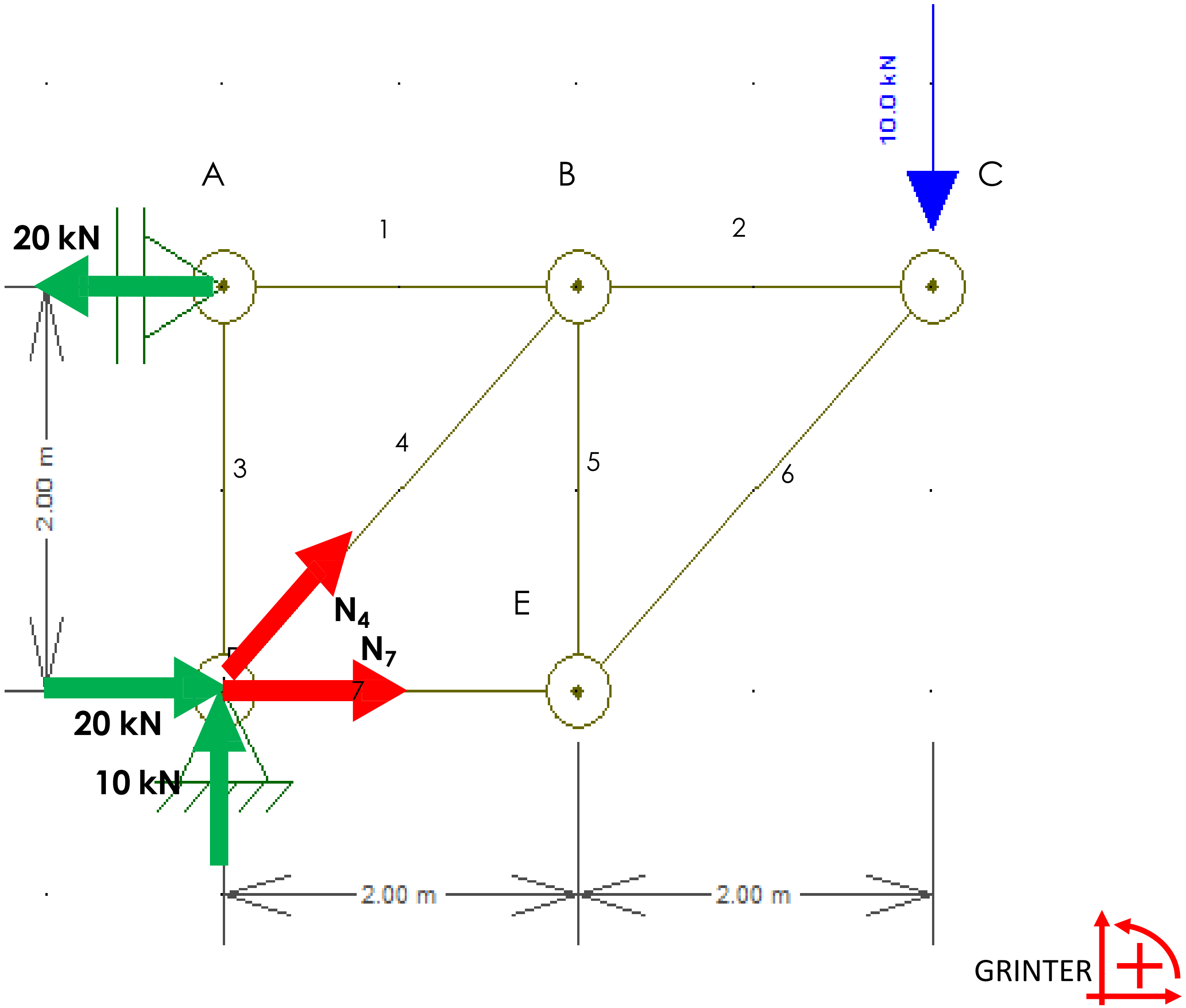


Equilíbrio do nó A

$$\Sigma F_x = 0$$
$$N_1 - 20 = 0$$
$$N_1 = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0$$
$$-N_3 = 0$$
$$N_3 = 0$$

GRINTER



Equilíbrio do nó D

$\Sigma F_y = 0$

$N_4 * \text{sen}45^o + 10 = 0$

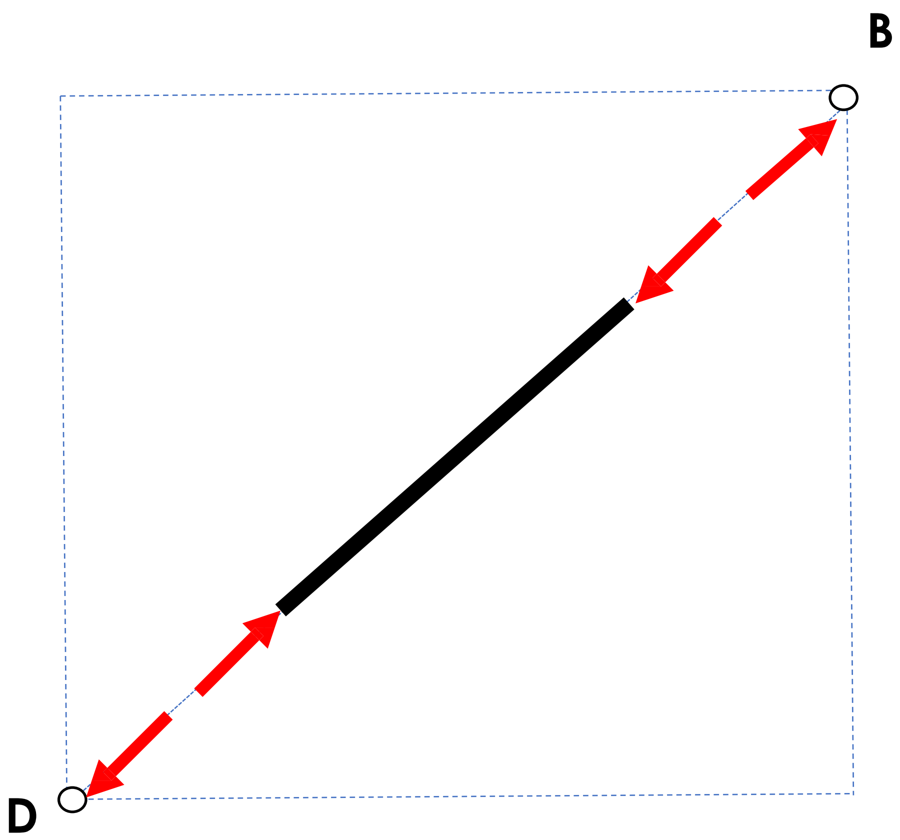
$N_4 = - 14{,}1 \text{ kN}$

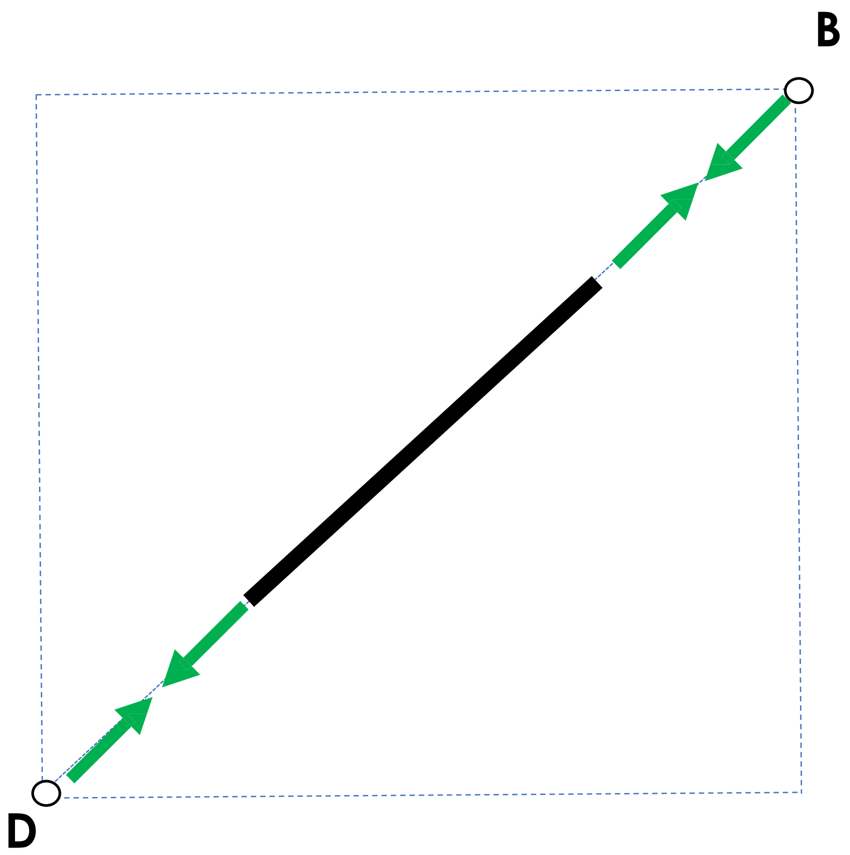
$\Sigma F_x = 0$

$N_7 + 20 + N_4 * \cos 45^o = 0$

$N_7 + 20 - 10 = 0$

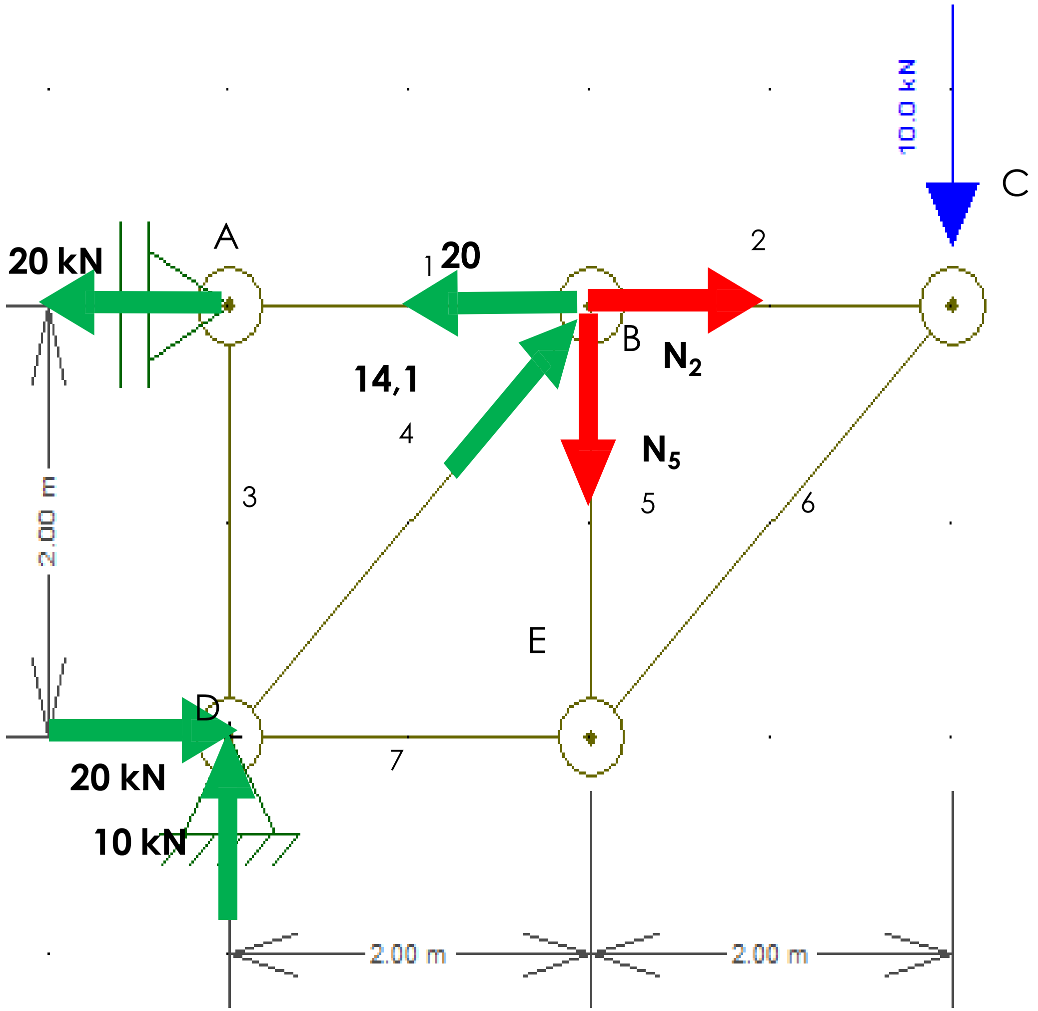
$N_7 = - 10 \text{ kN}$





TRAÇÃO NO NÓ = TRAÇÃO NA BARRA

COMPRESSÃO NO NÓ = COMPRESSÃO NA BARRA



GRINTER

Equilíbrio do nó B

$\Sigma\ F_y = 0$

$- N_5 + 14{,}1 * \text{sen}45^{\circ} = 0$

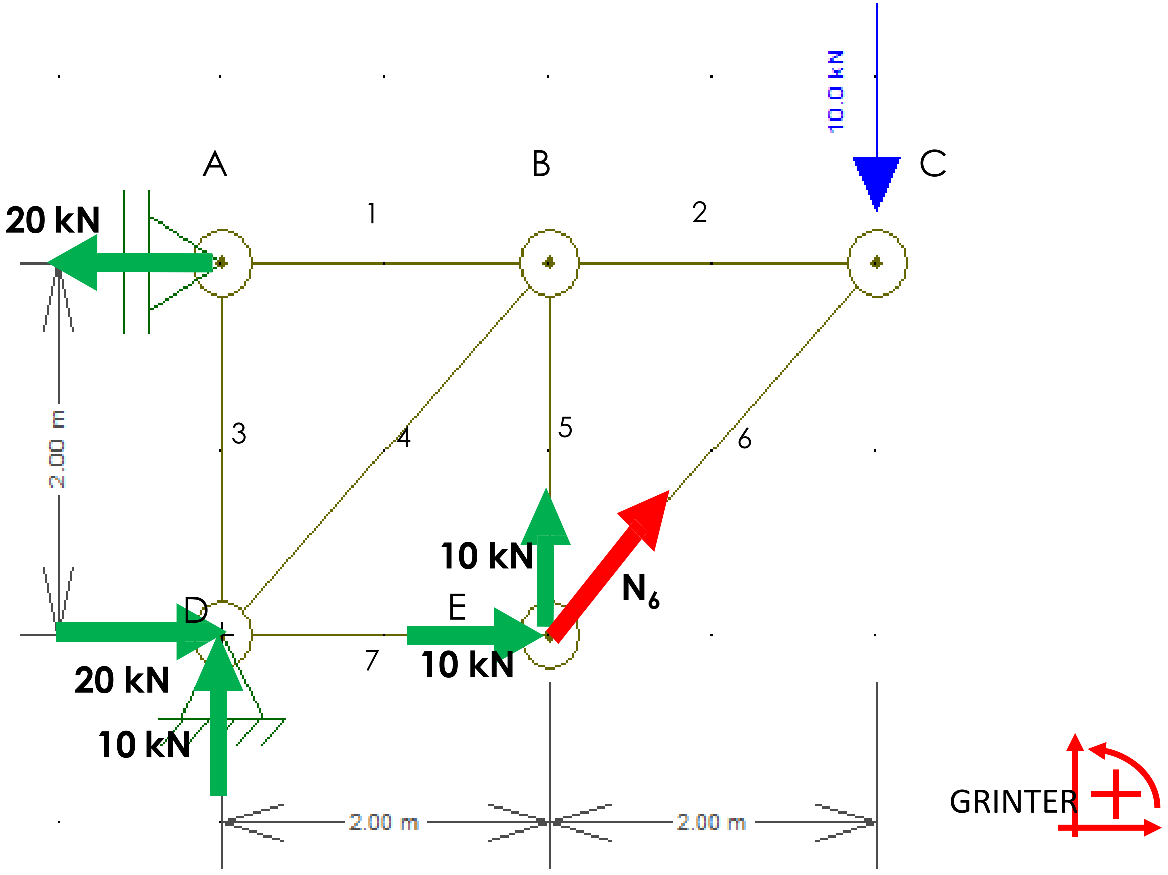
$N_5 = 10\ \text{kN}$

$\Sigma\ F_x = 0$

$N_2 - 20 + 14{,}1 * \cos 45^{\circ} = 0$

$N_2 - 10 = 0$

$N_2 = 10\ \text{kN}$



Equilíbrio do nó E

$\Sigma F_y = 0$

$N_6 * sen45° + 10 = 0$

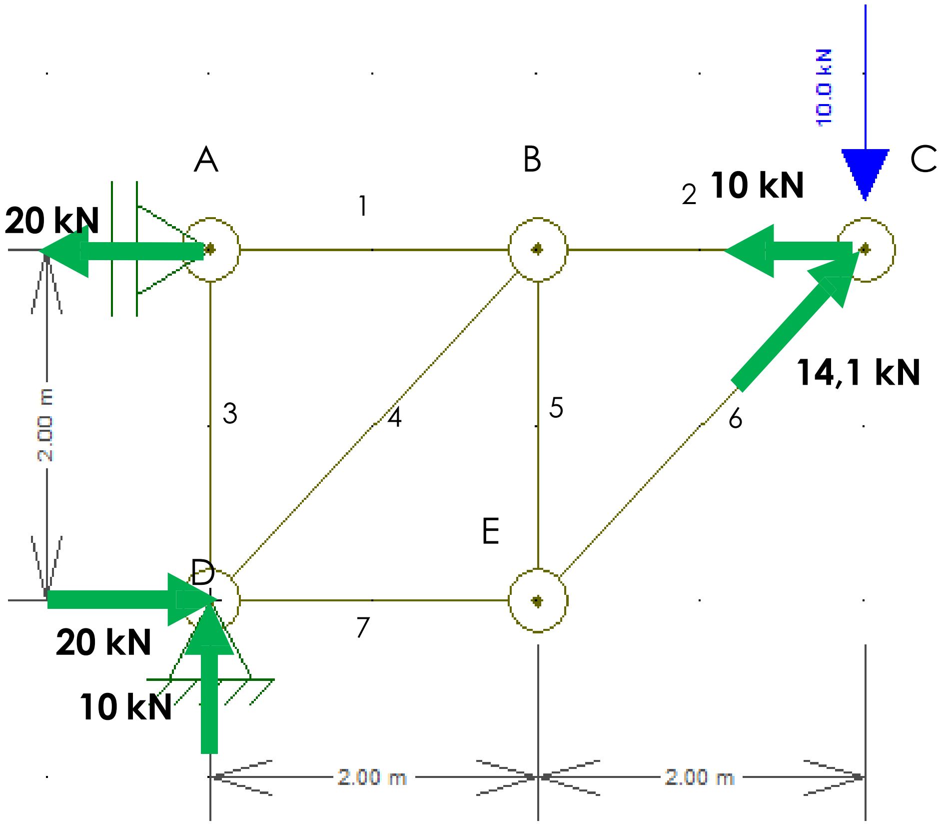
$N_6 = -14,1$ kN

Verificação 1

$\Sigma F_x = 0$

$N_6 * cos45° + 10 = 0$

$-10 + 10 = 0$ OK



Equilíbrio do nó C

Verificação 2

$\Sigma F_y = 0$

$14{,}1 * \text{sen}45° - 10 = 0$

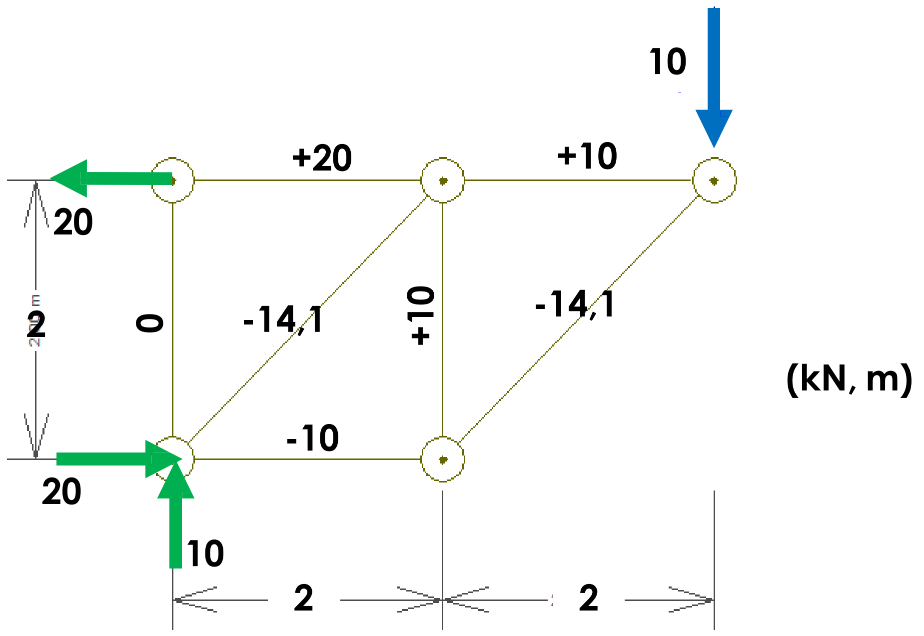
$10 - 10 = 0$ **OK**

Verificação 3

$\Sigma F_x = 0$

$14{,}1 * \cos45° - 10 = 0$

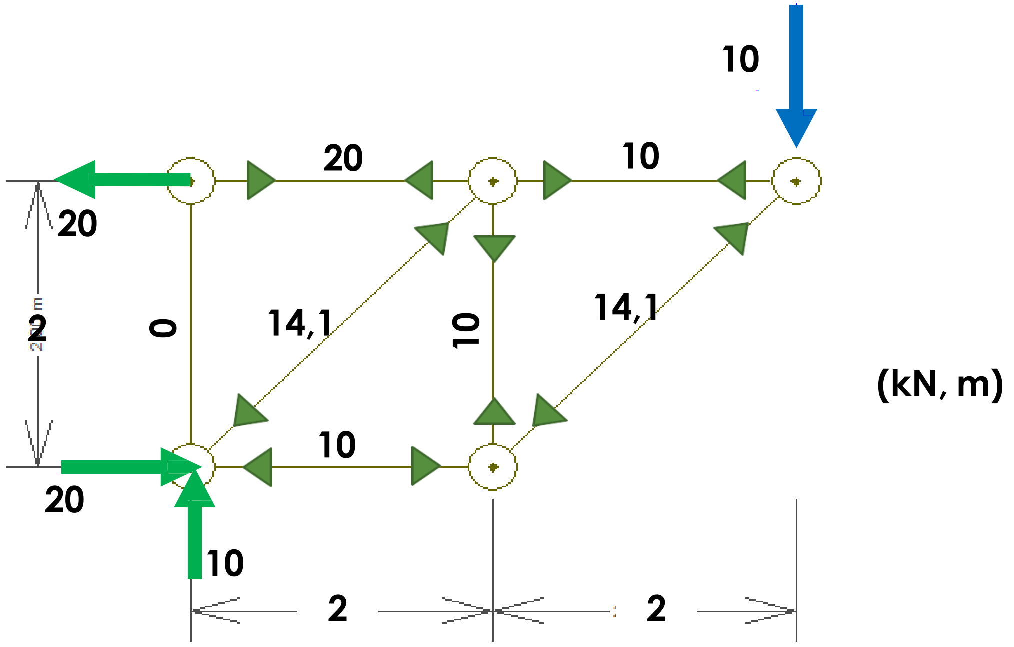
$10 - 10 = 0$ **OK**



Exemplo

Representação dos resultados do exemplo do Método do Equilíbrio dos Nós.

N_1	+ 20
N_2	+10
N_3	0
N_4	-14,1
N_5	+10
N_6	-14,1
N_7	-10



MÉTODO DE RITTER

- **Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras**
- **Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio**
- **Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas**
- **Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte ("corte de Ritter") que explicite três incógnitas, que podem ser obtidas pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte**
- **É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente**

Para partes da estrutura:

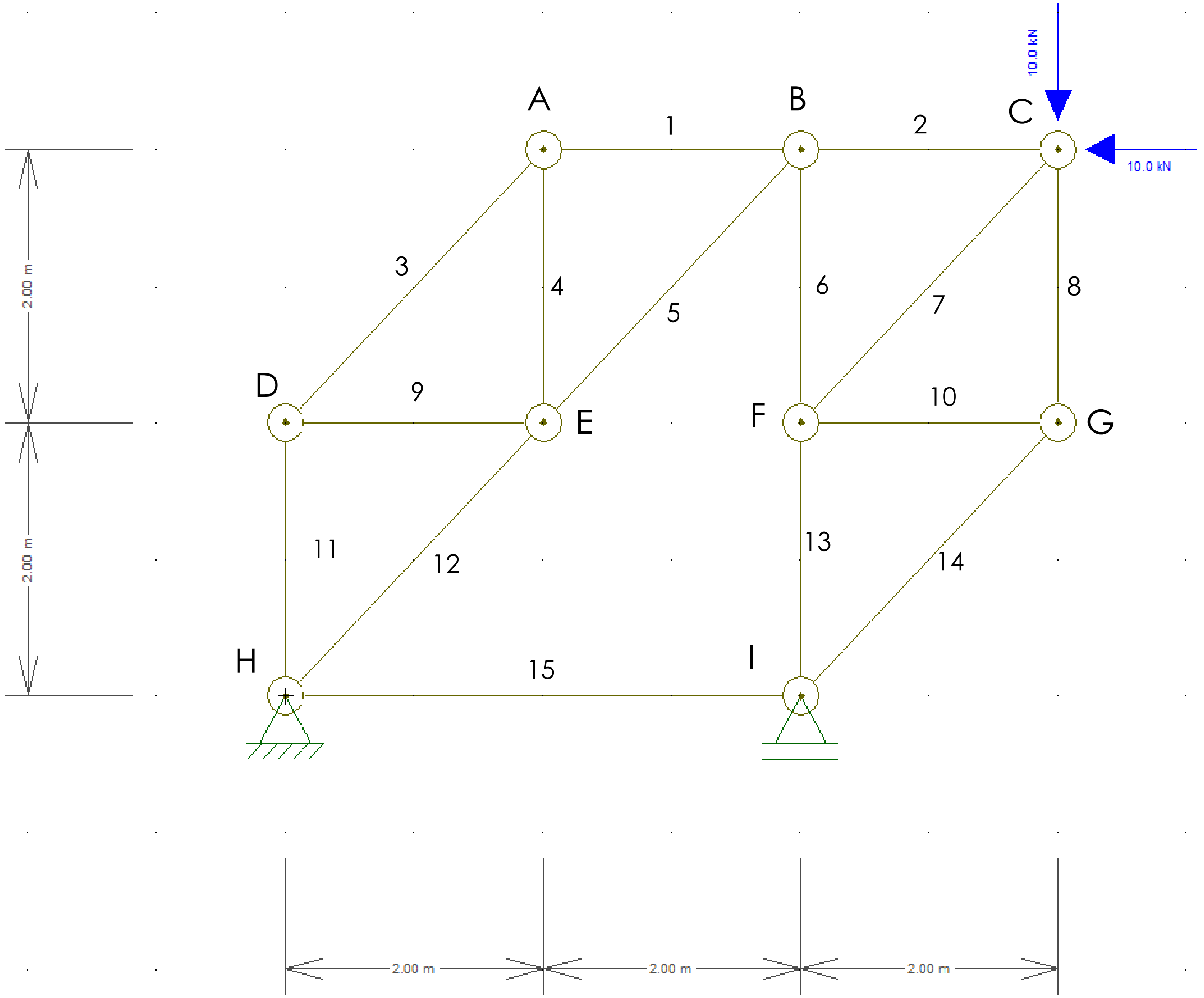
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$

MÉTODO DE RITTER

- **Procedimento:**
  - **Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido;**
  - **Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravesse três barras;**
  - **Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas;**
  - **Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas;**
  -
  - **No final da resolução, surgem três equações de verificação**

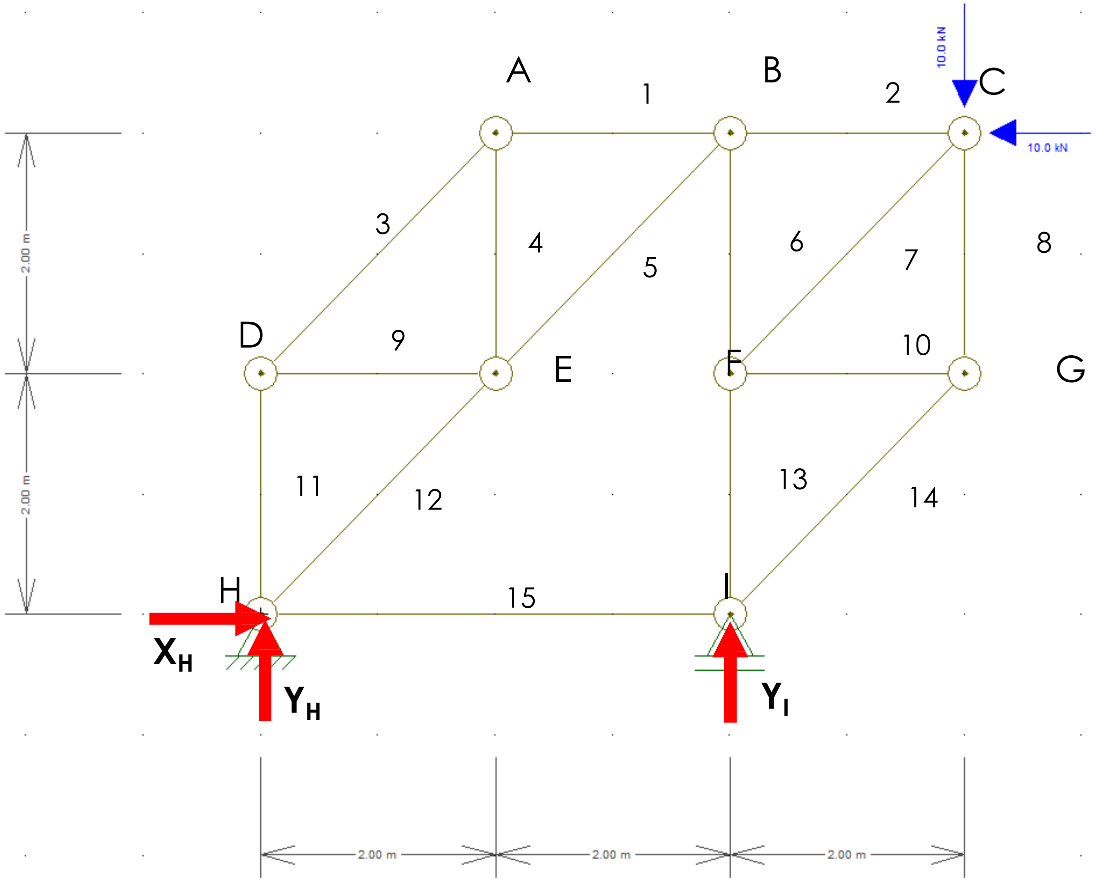
Para partes da estrutura:

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$



Exercício 2

Calcule os esforços nas barras 1, 5 e 15 da treliça ilustrada.



Reações de apoio

$\Sigma F_x = 0$

$X_H - 10 = 0$

$X_H = 10$ kN

$\Sigma M_H = 0$

$Y_I * 4 + 10 * 4 - 10 * 6 = 0$

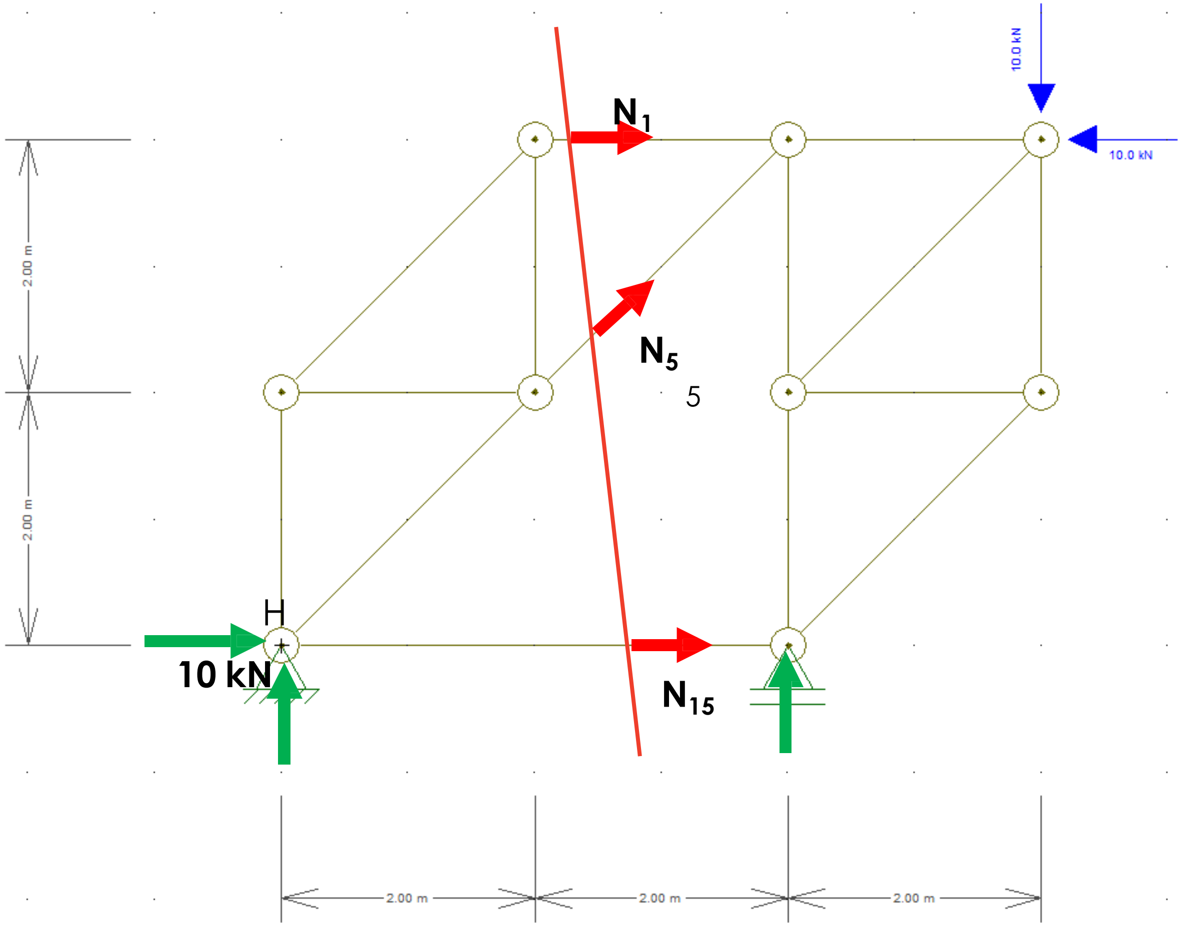
$Y_I = 5$ kN

$\Sigma F_y = 0$

$Y_H - 10 + Y_I = 0$

$Y_H - 10 + 5 = 0$

$Y_H = 5$ kN



Corte de Ritter

Equilíbrio da parte esquerda da treliça:

$\Sigma F_y = 0$

$N_5 * sen45° + 5 = 0$

$N_5 = -7,1\ kN$

$\Sigma M_H = 0$ GRINTER

$-N_1 * 4 = 0$

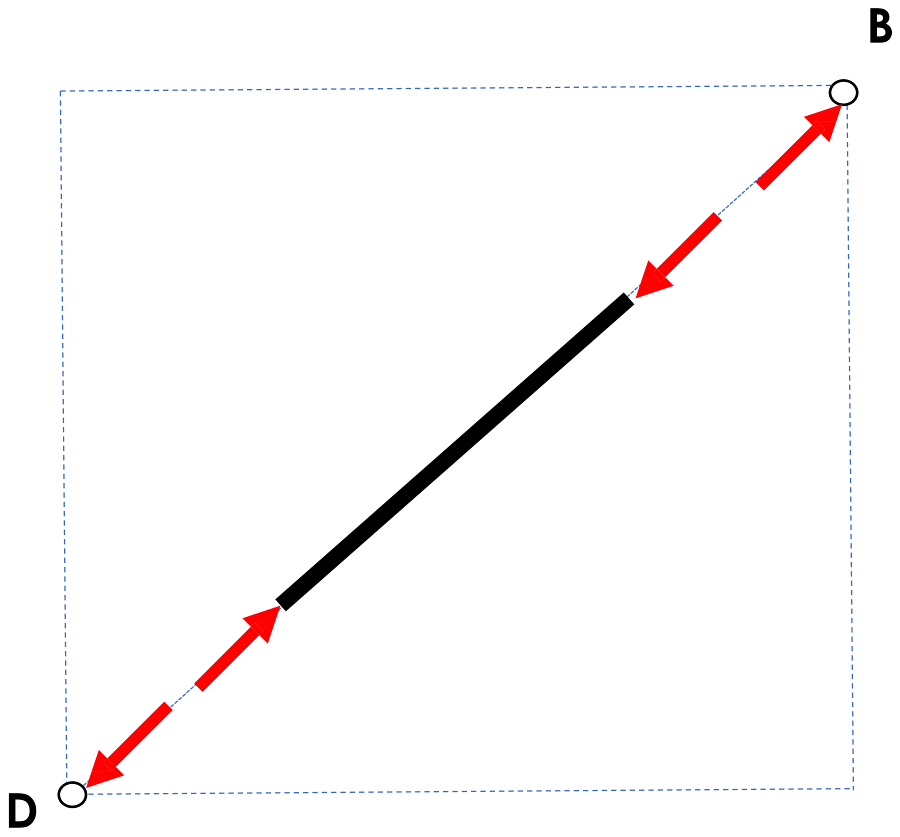
$N_1 = 0$

$\Sigma F_x = 0$

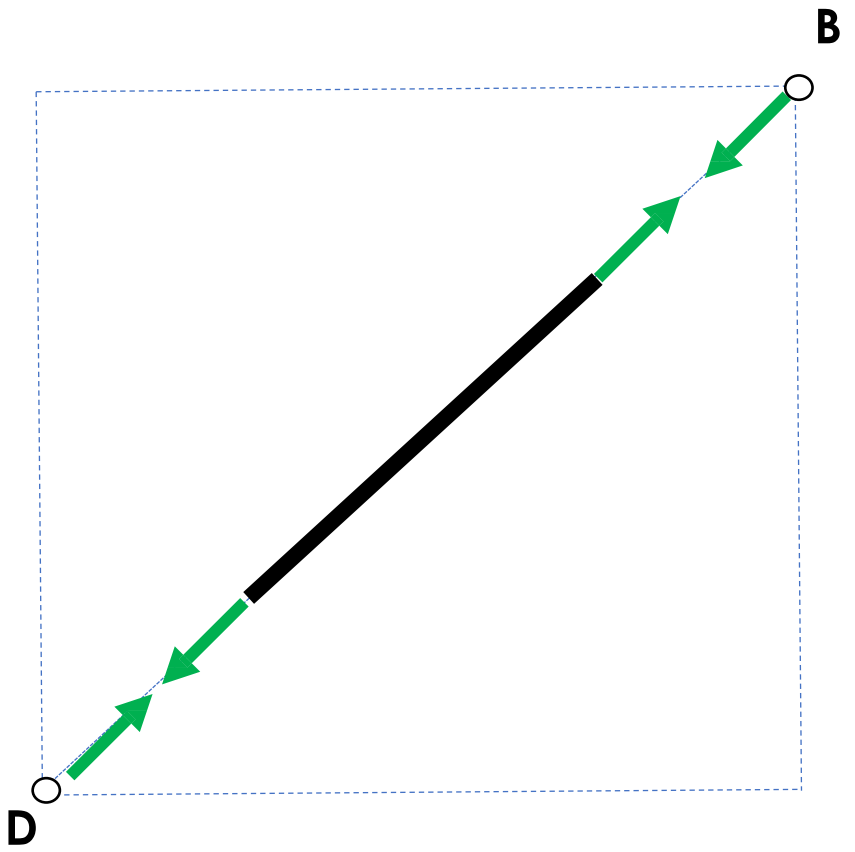
$N_1 + N_5 * cos45° + N_{15} + 10 = 0$

$0 - 7,1 * cos45° + N_{15} + 10 = 0$

$N_{15} = -5\ kN$



COMPRESSÃO NO NÓ, COMPRESSÃO NA BARRA



TRAÇÃO NO NÓ, TRAÇÃO NA BARRA

MÉTODO DO EQUILÍBRIO DOS NÓS

- Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então seus nós também estão em equilíbrio
- Apenas duas equações de equilíbrio podem ser aplicadas para cada nó, por ser articulado nas barras
- Em treliças simples isostáticas, é possível explicitar as incógnitas uma a uma pelo equilíbrio dos nós
- Procedimento nas treliças planas:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Cálculo sucessivo dos esforços nas barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

Para os nós: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$

MÉTODO DE RITTER

- Consideram-se como incógnitas os esforços normais nas barras
- Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio
- Para uma parte da estrutura que contenha pelo menos dois nós, as três equações de equilíbrio no plano podem ser aplicadas
- Em treliças simples ou compostas, é comum encontrar uma linha de corte ("corte de Ritter") que explicite três incógnitas, que podem ser obtidas pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes da treliça, destacada pelo corte
- É comum mesclar o Método de Ritter com o Método do Equilíbrio dos Nós, explicitando as incógnitas de forma conveniente
- Procedimento:
  - Cálculo das reações de apoio, utilizando as três equações de equilíbrio, considerando a treliça como corpo rígido
  - Corte da treliça em duas partes contendo pelo menos dois nós cada uma, com uma linha de corte que atravesse três barras
  - Cálculo dos esforços nas três barras onde houve o corte, pelo equacionamento do equilíbrio de uma das partes cortadas
  - Em seguida, pelo Método dos Nós, cálculo sucessivo dos esforços das barras, pelo equilíbrio dos nós em que houver apenas duas incógnitas
  - No final da resolução, surgem três equações de verificação

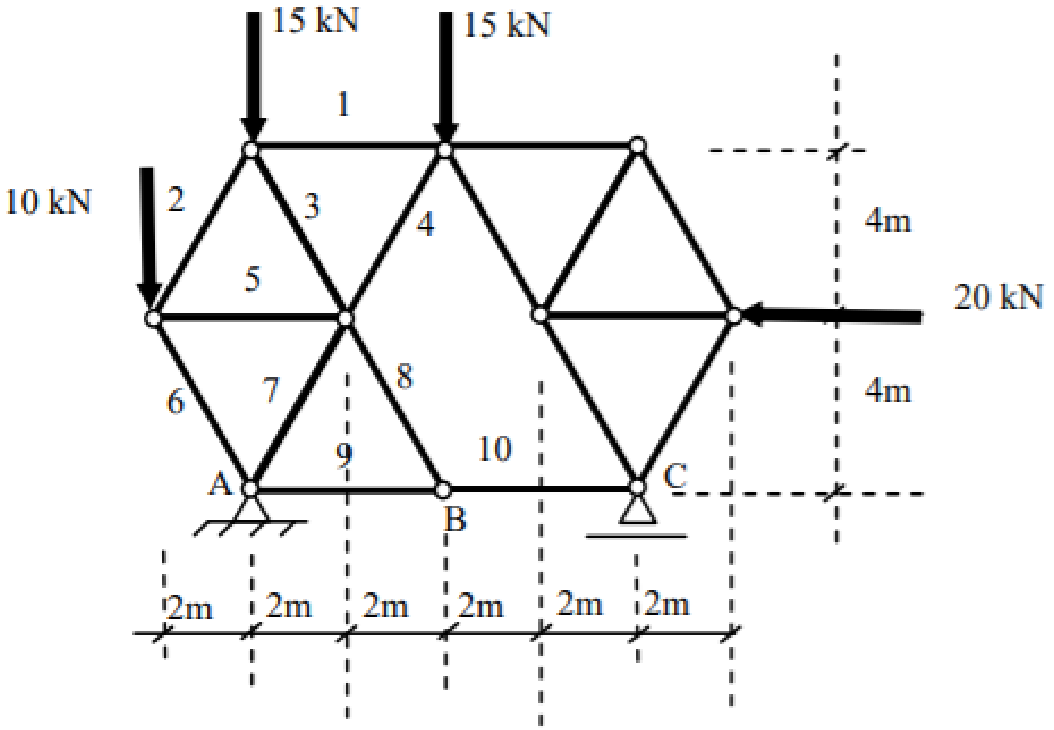
- **Para obter 3 equações de equilíbrio linearmente independentes é necessário que as barras cortadas não sejam paralelas, e que as mesmas não sejam concorrentes no mesmo ponto.**

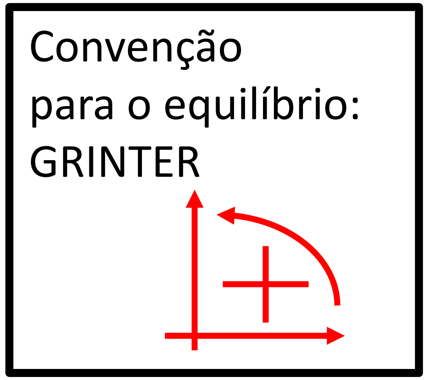
Para partes da estrutura:

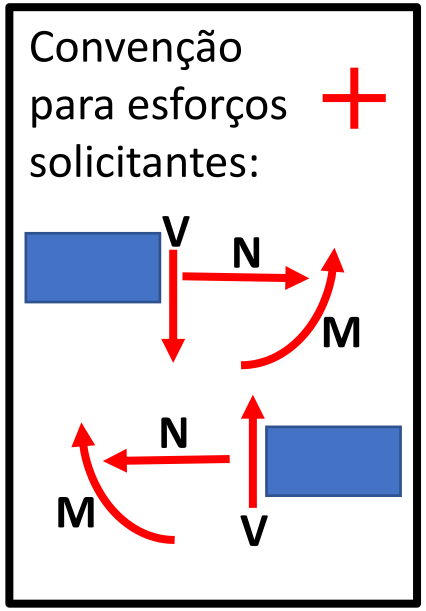
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_O = 0$$

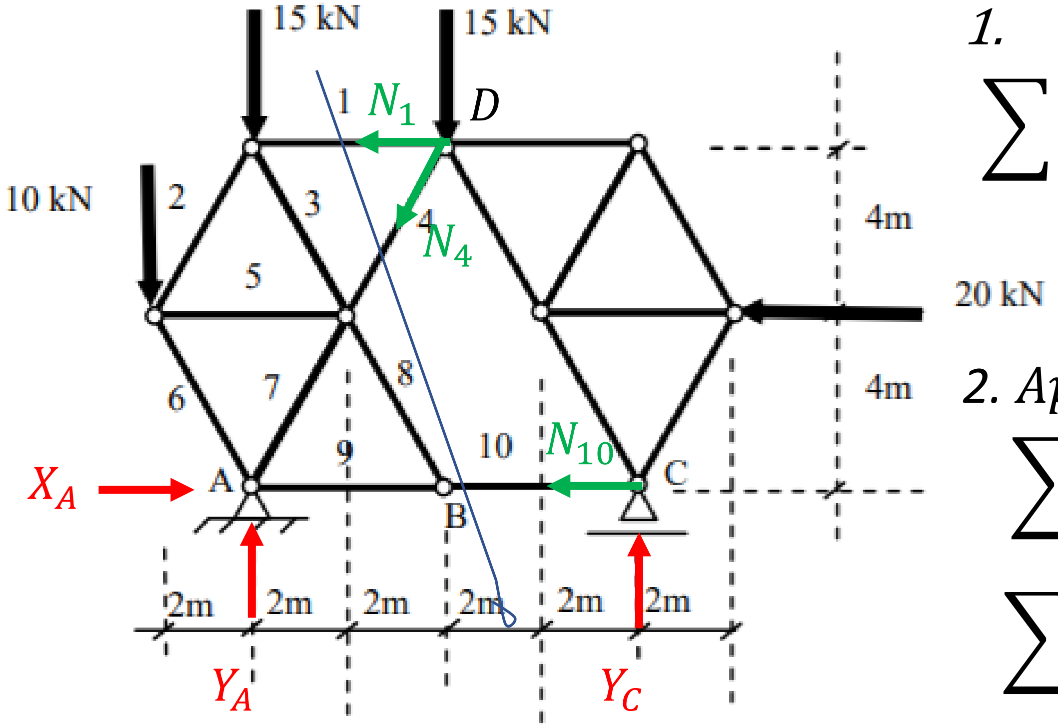
EXERCÍCIO 3

Na treliça plana da figura, determine a reação na articulação fixa A e as forças normais nas barras 4, 8, 9 e 10.

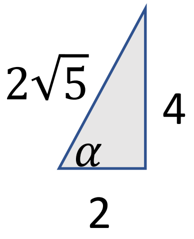


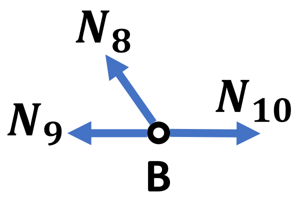






$$sen\alpha = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$





1. *Cálculo da reação Y_C*

$$\sum M_{(A)} = 0 = 10 * 2 - 15 * 4 + 20 * 4 + Y_C * 8 \Rightarrow Y_C = -5kN$$

2. *Aplicação do método de Ritter (**parte da direita**)*

$$\sum M_{(D)} = 0 = -20 * 4 - N_{10} * 8 + Y_C * 4 \Rightarrow \boldsymbol{N_{10} = -12,5kN}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 = N_1 * 8 - 15 * 4 + 20 * 4 + Y_C * 8 \Rightarrow N_1 = 2,5kN$$

$$\sum Y = 0 = -15 - N_4 * sen\alpha + Y_C \Rightarrow \boldsymbol{N_4 = -10\sqrt{5}kN}$$

3. *Equilíbrio do nó B*

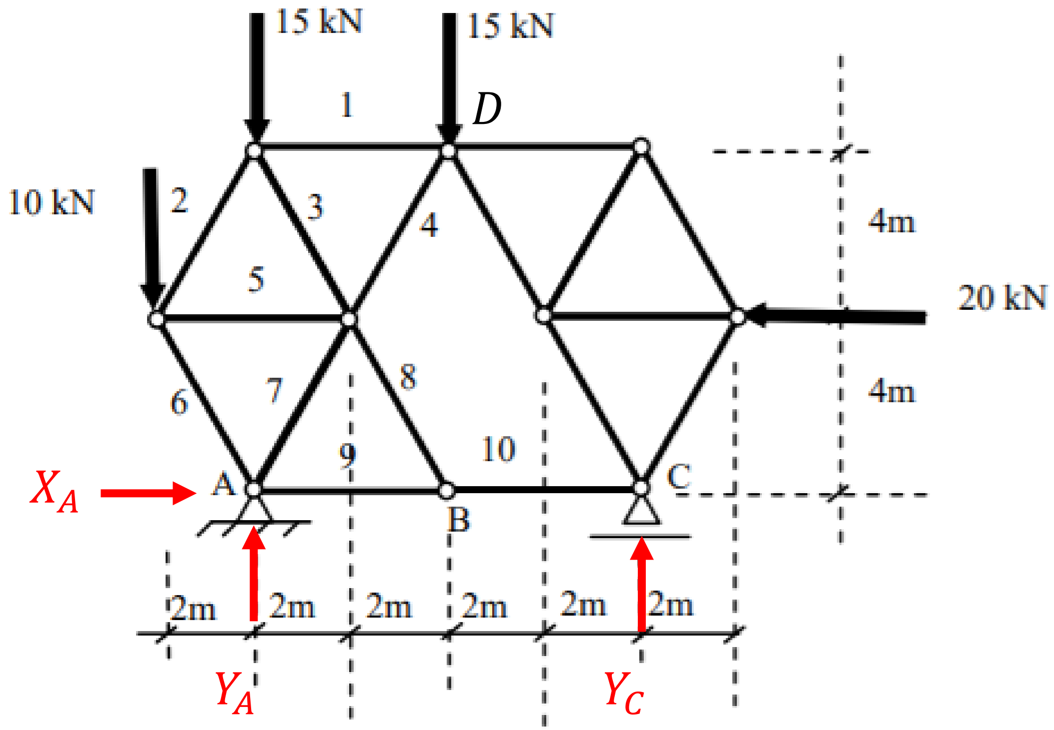
$$\sum Y = 0 = N_8 * sen\alpha \Rightarrow \boldsymbol{N_8 = 0}$$

$$\sum X = 0 = -N_9 + N_{10} \Rightarrow \boldsymbol{N_9 = -12,5\ kN}$$

$4.\,Cálculo\ das\ reações\ em\ A$

$$\sum M_{(C)} = 0 = 10*10 + 15*8 + 15*4 + 20*4 - Y_A*8 \Rightarrow \boldsymbol{Y_A = 45kN}$$

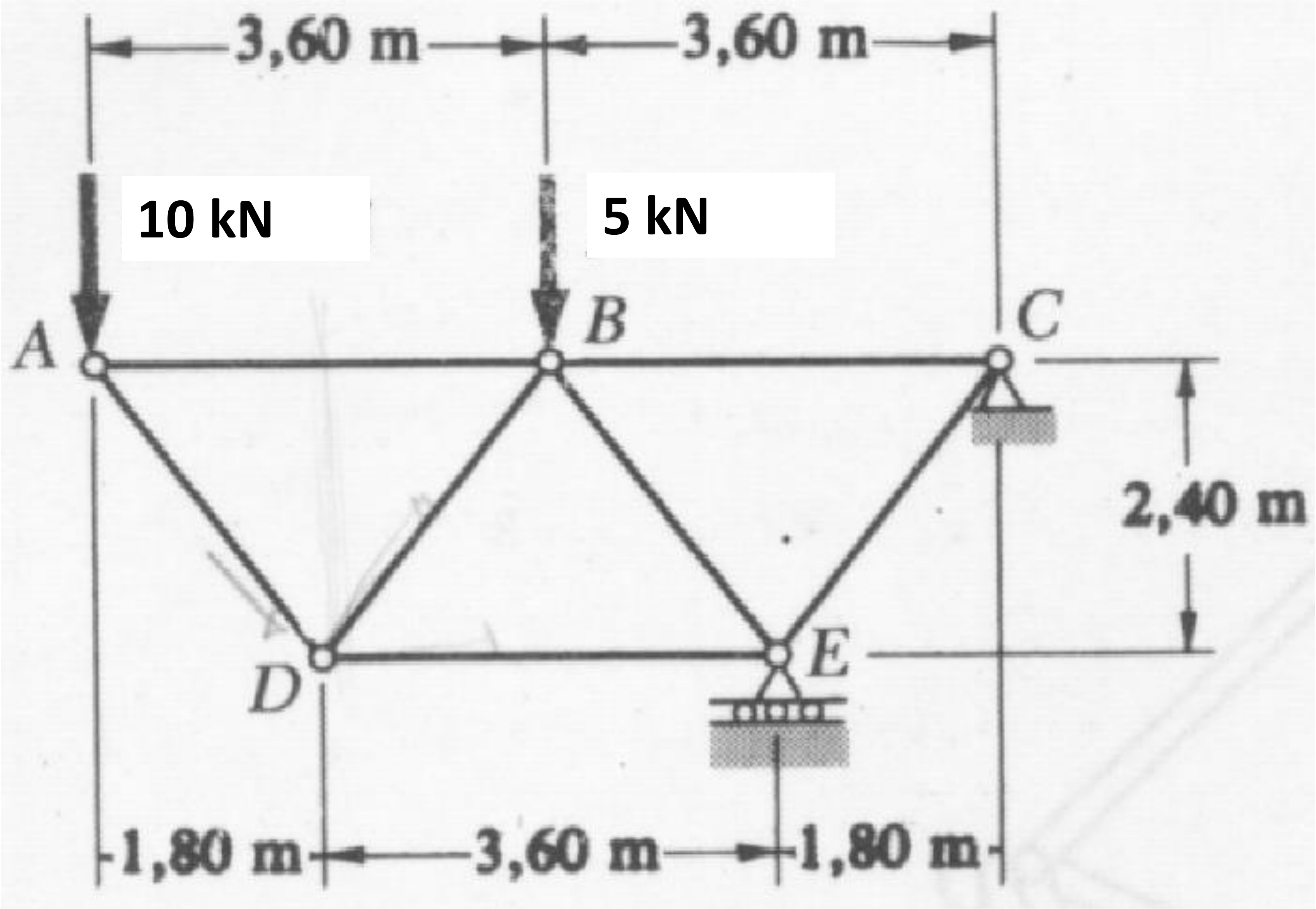
$$\sum X = 0 = X_A - 20 \Rightarrow \boldsymbol{X_A = 20kN}$$



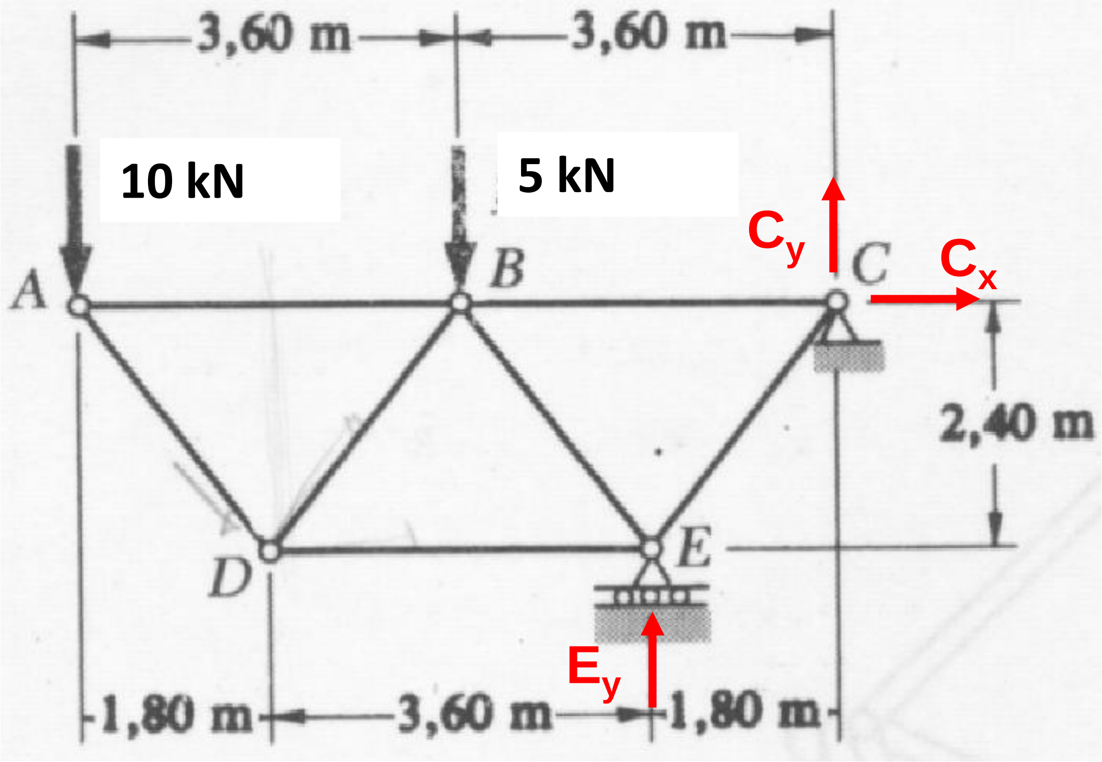
barra	kN	
4	$-10\sqrt{5}$	compressão
8	0	nulo
9	$-12{,}5$	compressão
10	$-12{,}5$	compressão

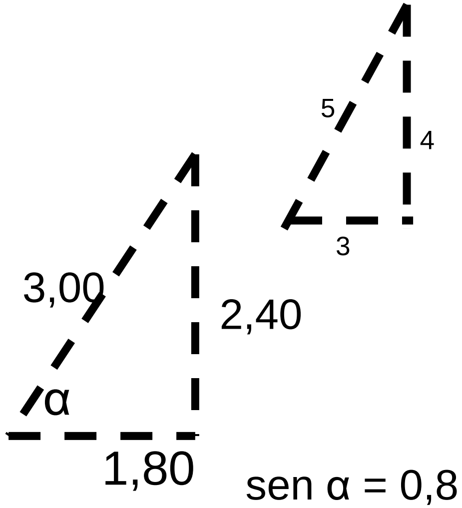
EXERCÍCIO 4

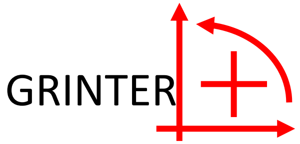
Determine os esforços normais nas barras da treliça:



1. Reações nos apoios







sen α = 0,8

cos α = 0,6

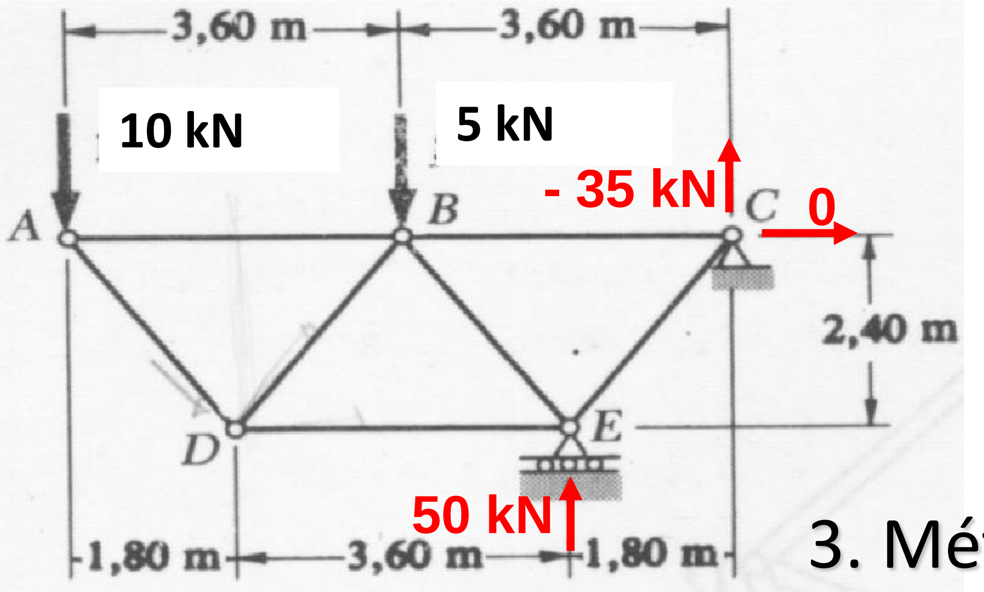
$$\Sigma M_C = 0 = +10kN \,.\, 7{,}20m + 5kN \,.\, 3{,}60m - E_y .\, 1{,}80m \;\Longrightarrow\; \mathbf{E_y = +50\ kN}$$

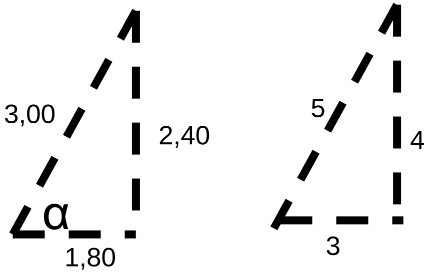
$$\Sigma F_X = 0 = C_x \Longrightarrow \mathbf{C_x = 0}$$

$$\Sigma F_Y = 0 = -\,10kN - 5kN + C_y + E_y \;\Longrightarrow\; \mathbf{C_Y = -\,35\ kN}$$

GRINTER

2. Diagrama de corpo livre



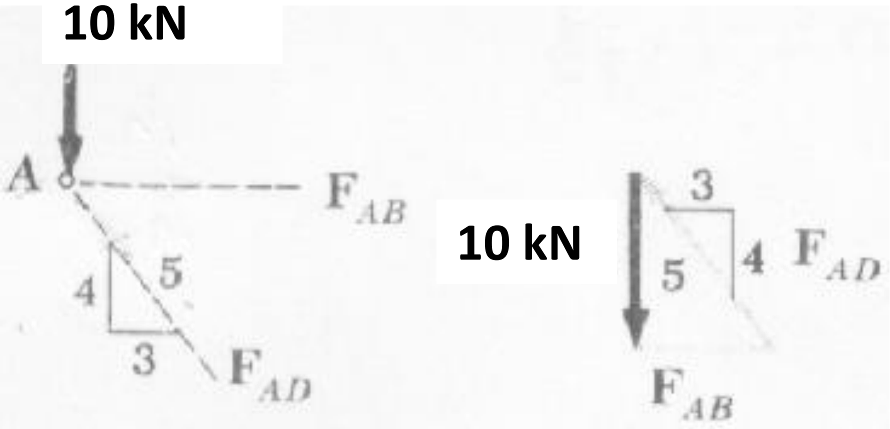


sen α = 0,8
cos α = 0,6

3. Método do equilíbrio dos nós

Nó A: $\Sigma F_y = 0 = -10kN - 0{,}8.F_{AD}$

$\Sigma F_x = 0 = F_{AD}\,.0{,}6 + F_{AB}$



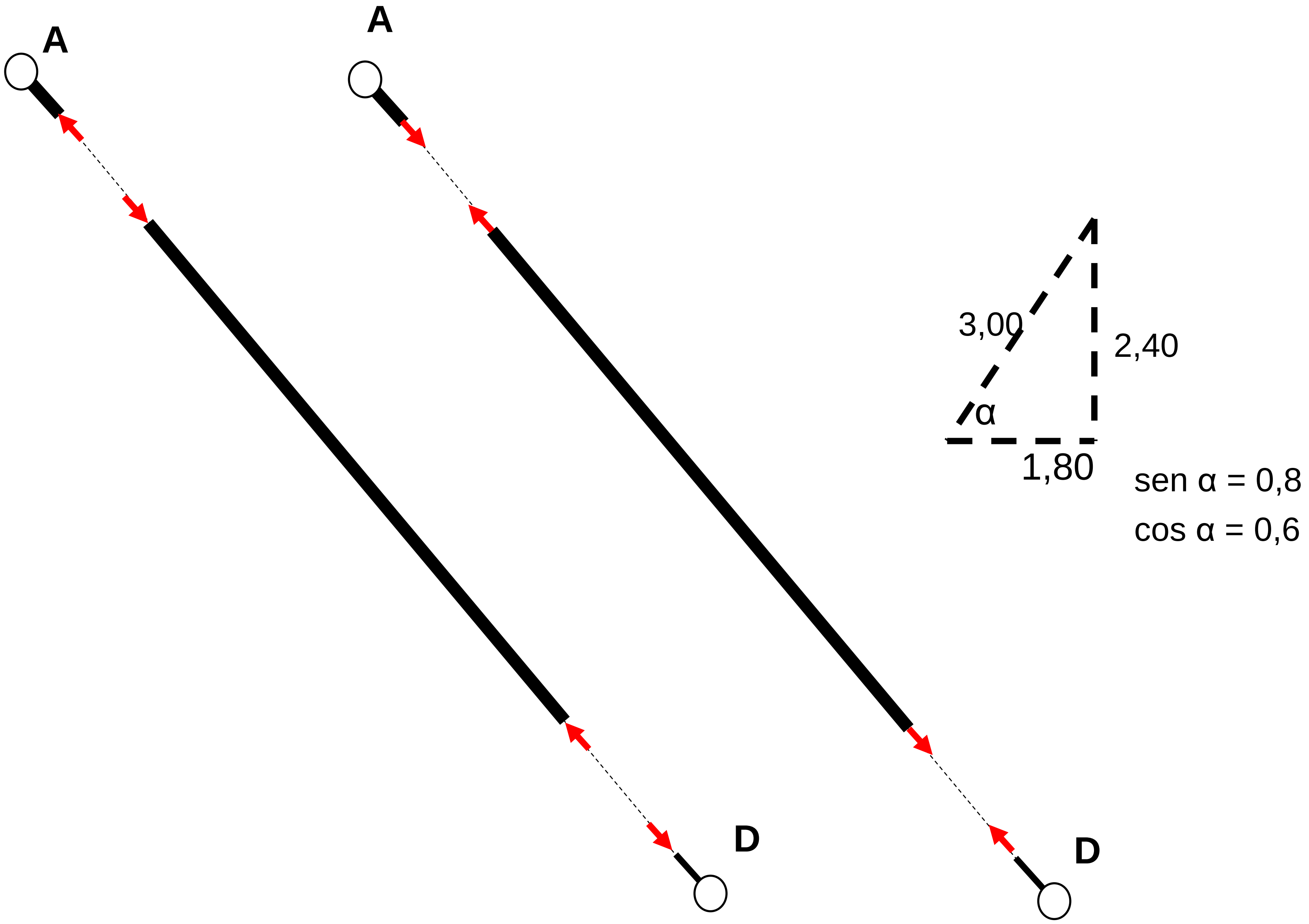
F_{AD} = -12,5 kN $\Longrightarrow F_{DA}$ =12,5 kN

(Compressão no nó e na barra)

F_{AB} = +7,5 kN

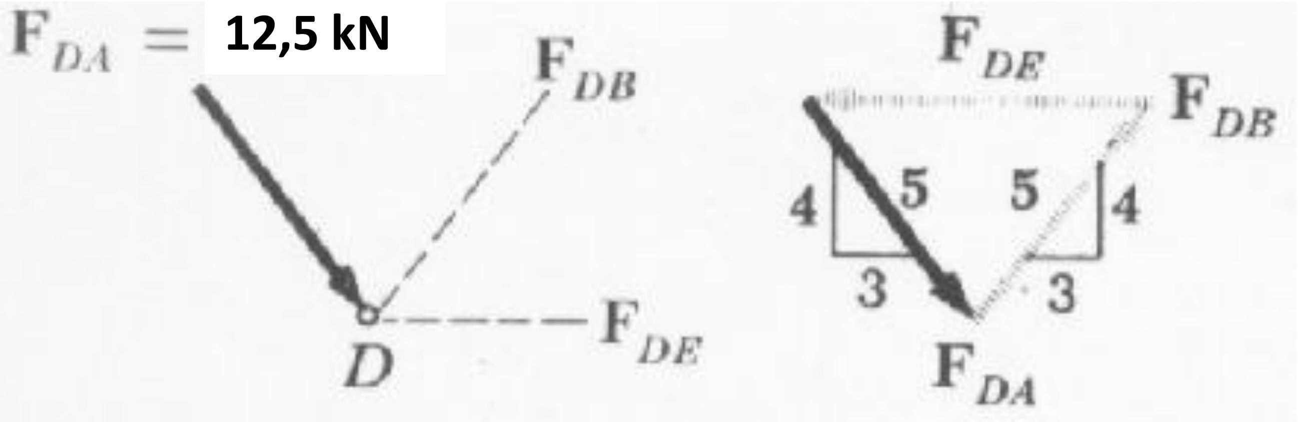
(Tração no nó e na barra)

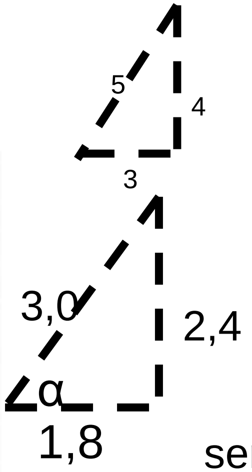
Nós A e D:



GRINTER

Nó D:





sen α = 0,8
cos α = 0,6

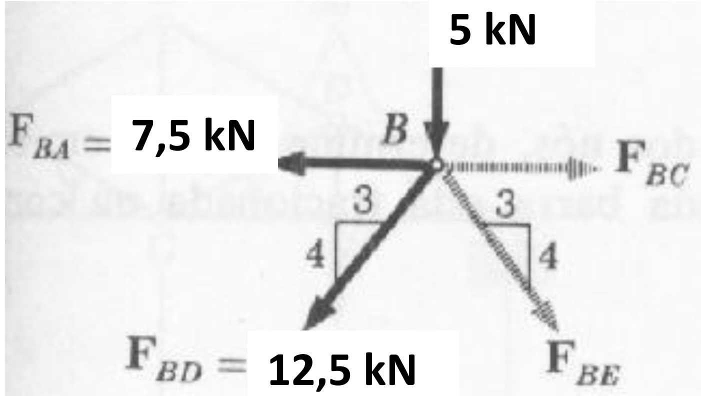
$$\Sigma F_y = 0 = -12{,}5\ .\ 0{,}8\ + 0{,}8.\ F_{DB}$$

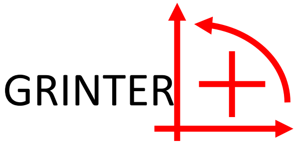
$$\Sigma F_x = 0 = F_{DE} + 0{,}6\ .\ F_{DB} + 0{,}6\ .\ 12{,}5$$

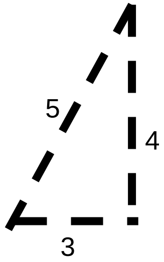
F_{DB} = +12,5 kN (Tração no nó e na barra)

F_{DE} = - 15 kN (Compressão no nó e na barra)

Nó B:







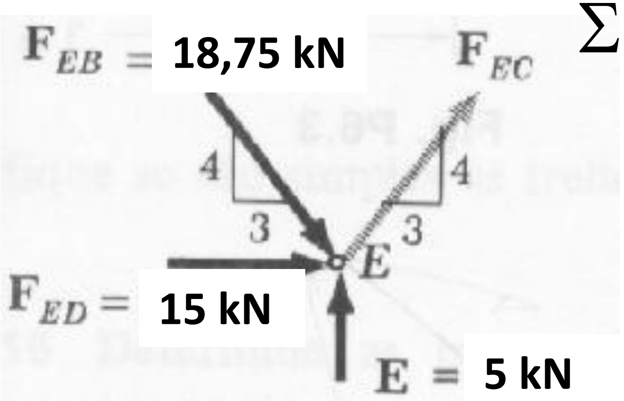
$$\Sigma F_Y = 0 = -5 - 0{,}8 \,.\, 12{,}5 - 0{,}8 \,.\, F_{BE}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{F_{BE} = -18{,}75\ \text{kN}}\ \textbf{(Compressão)}$$

$$\Sigma F_X = 0 = F_{BC} - 7{,}5 - 0{,}6 \,.\, 12{,}5 - 0{,}6 \,.\, 18{,}75$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{F_{BC} = 26{,}25\ \text{kN}}\ \textbf{(Tração)}$$

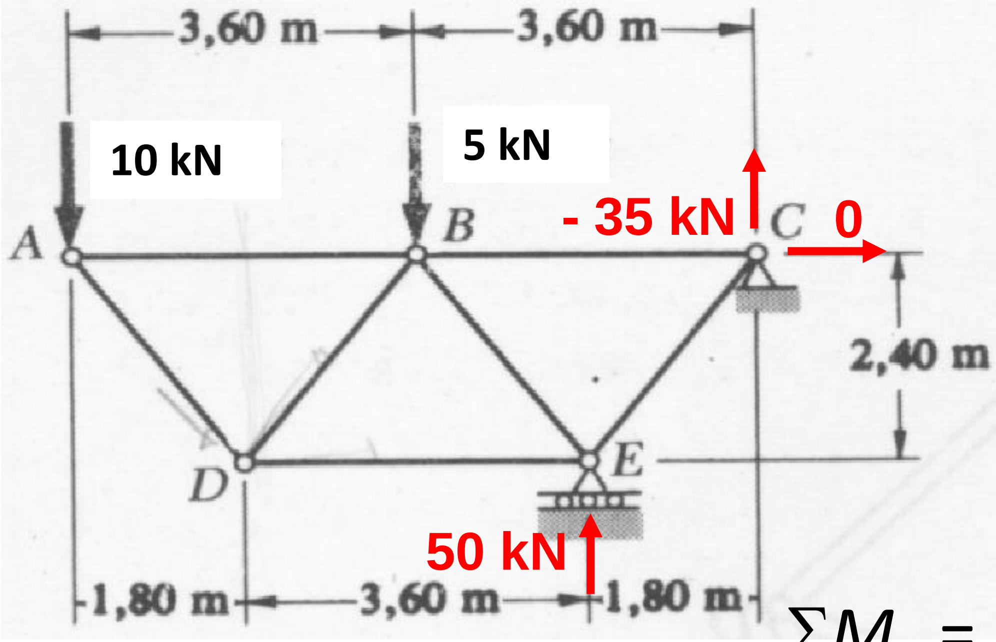
Nó E:

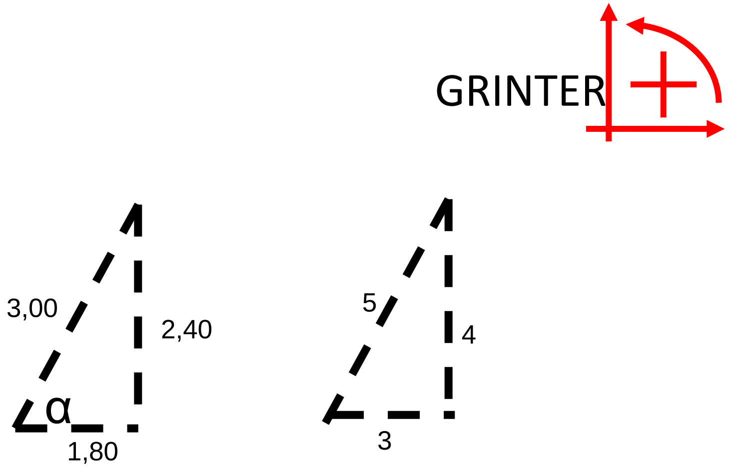


$$\Sigma F_X = 0 = 0{,}6 \,.\, F_{EC} + 15 + 0{,}6 \,.\, 18{,}75$$

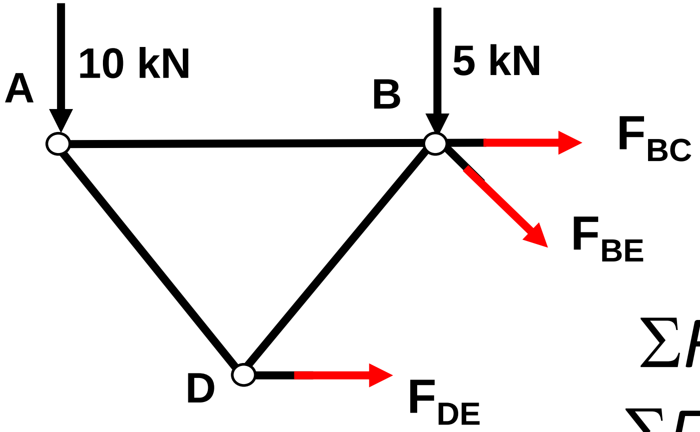
$$\Longrightarrow \boldsymbol{F_{EC} = -43{,}75\ \text{kN}}\ \textbf{(Compressão)}$$

4. Método de Ritter





sen α = 0,8
cos α = 0,6



$$\Sigma M_B = 0 = 10kN.3{,}60m + F_{DE}.2{,}40m$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_{DE} = -\ 15\ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -10kN - 5kN - F_{BE}.0{,}8$$

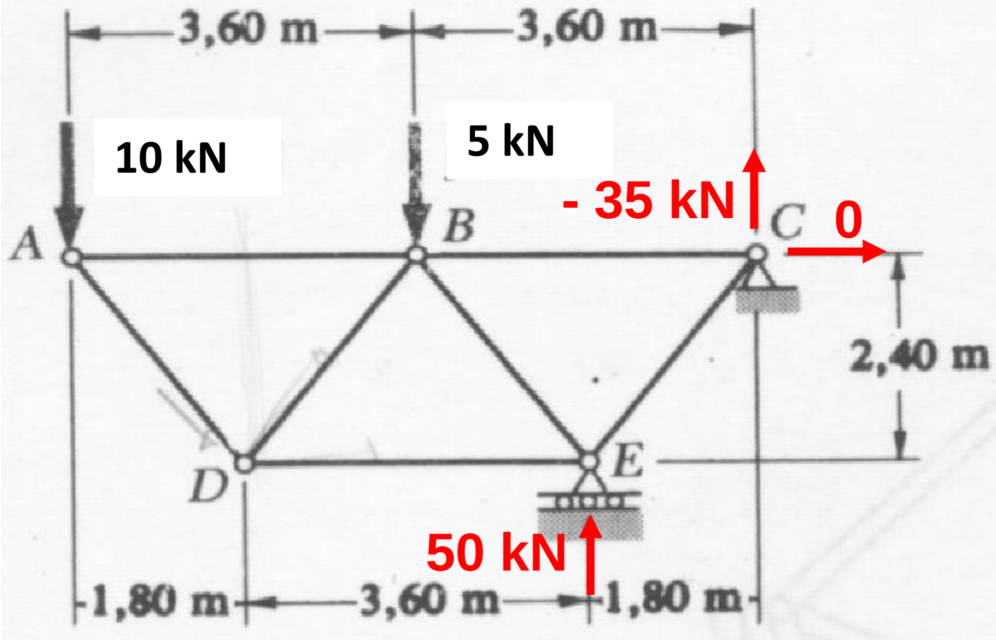
$$\Rightarrow \boldsymbol{F_{BE} = -\ 18{,}75\ kN}$$

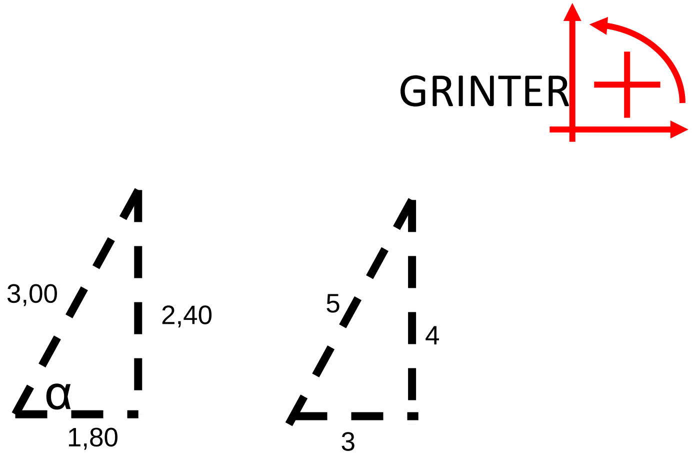
$$\Sigma F_x = 0 = F_{DE} + F_{BC} + 0{,}6\ .\ F_{BE}$$

$$\Sigma F_x = 0 = -\ 15\ kN + F_{BC} + 0{,}6.\ (-18{,}75\ kN)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F_{BC} = 26{,}25\ kN}$$

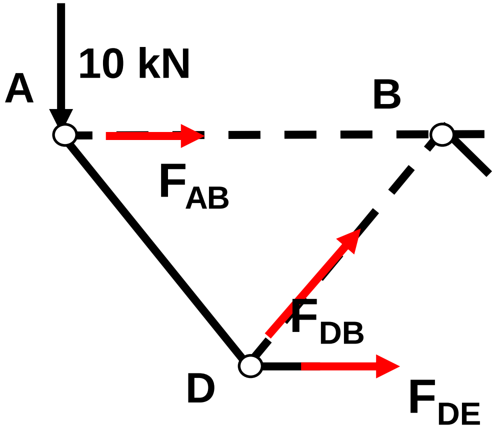
4. Método de Ritter





sen α = 0,8

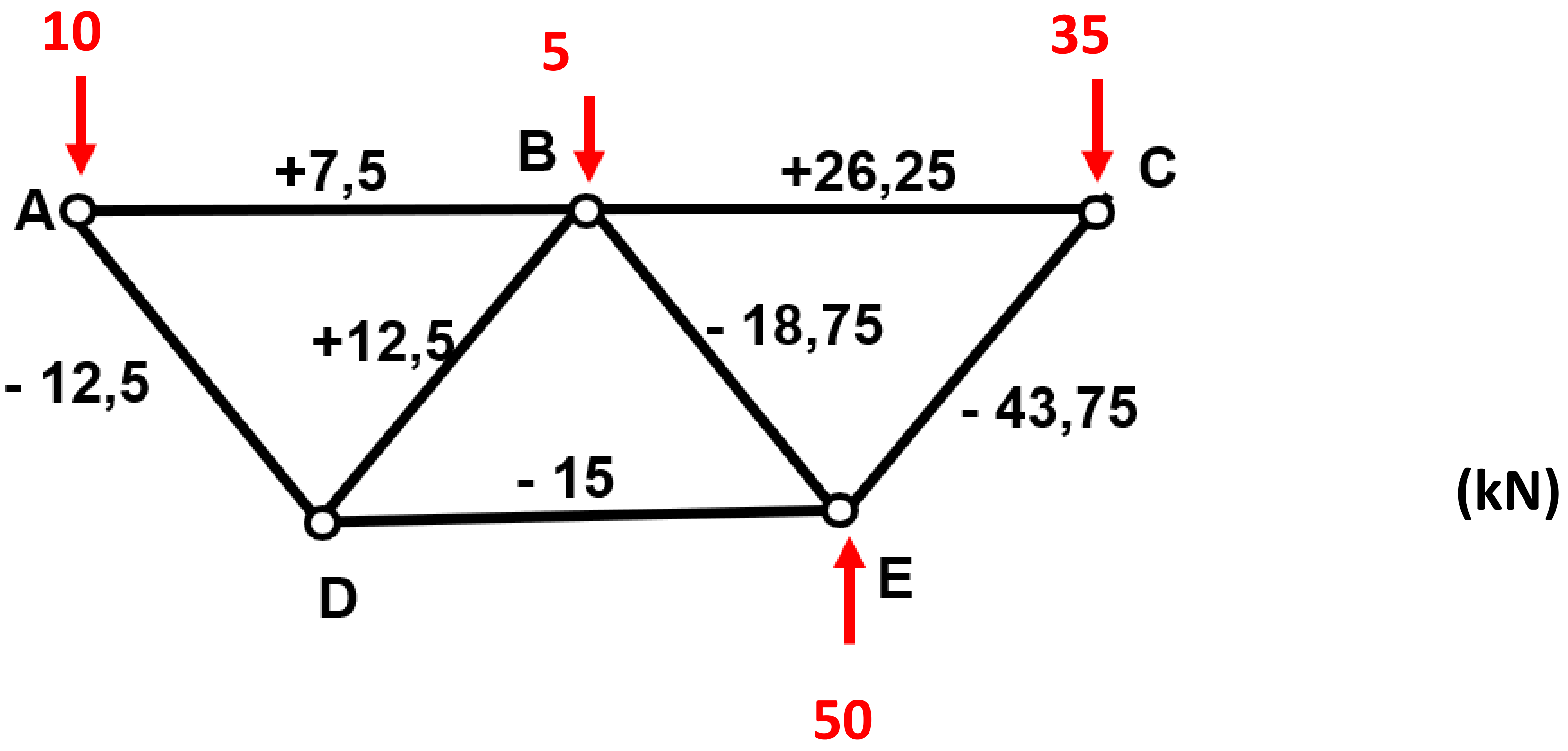
cos α = 0,6



$$\Sigma M_D = 0 = 10kN.1{,}80m - F_{AB}.2{,}40m$$
$$\Longrightarrow \mathbf{F_{AB} = 7{,}5\ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -\ 10kN + F_{DB}.0{,}8$$
$$\Longrightarrow \mathbf{F_{DB} = 12{,}5\ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 = 10kN.3{,}60m + F_{DE}.2{,}40m$$
$$\Longrightarrow \mathbf{F_{DE} = -\ 15\ kN}$$


10
5
35
+7,5
B
+26,25
C
A
+12,5
- 18,75
- 12,5
- 43,75
- 15
D
E
50
(kN)

EXERCÍCIO 5

PEF-3200 – 2ª. Prova – 11/05/2016

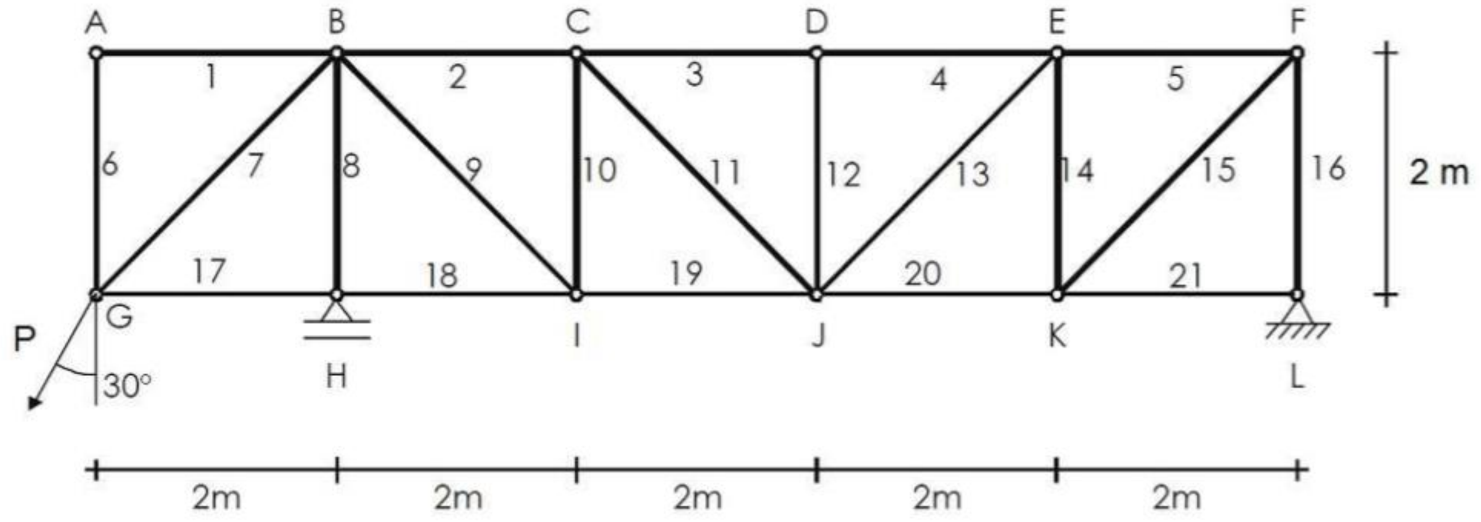
Nº USP:____________________Nome:____

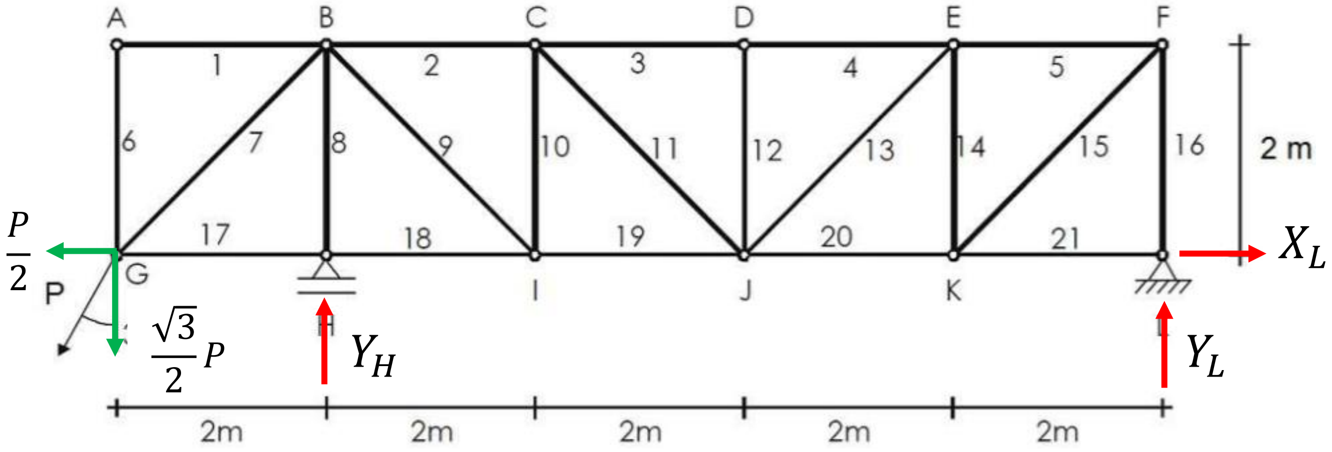
3ª Questão (pontos) Um engenheiro estrutural foi contratado para avaliar a treliça que é usada numa ponte em atividade no norte de Minas Gerais. Ele tem que apresentar um relatório sobre as restrições de uso da ponte com base na análise **apenas das barras 3, 11 e 19.** Isto, pois elas estão em processo adiantado de deterioração, conforme observado numa avaliação técnica realizada *a priori*. Todavia, por questões de logística, essas barras não podem ser substituídas, tendo-se que limitar seu uso nas ações. Assim:

a) Determine seus esforços normais em função de P;

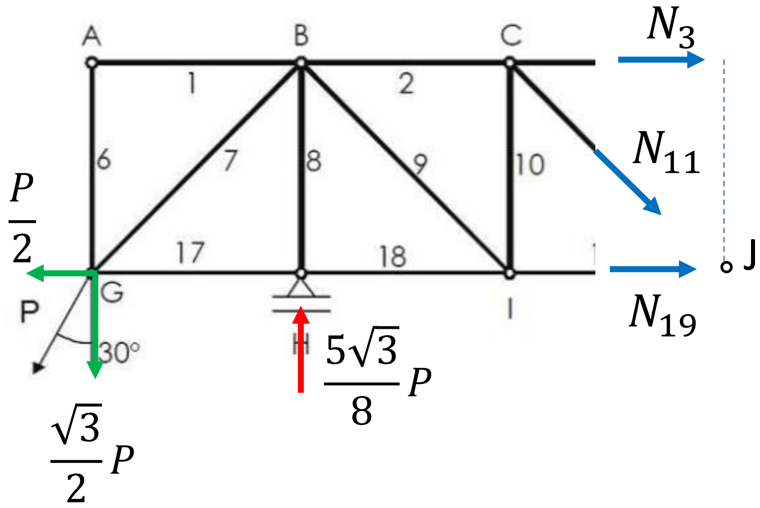
b) Após um ensaio destrutivo realizado em outras barras com o mesmo grau de deterioração, estabeleceu-se um valor máximo de esforço normal de tração e compressão para essas barras. Esses valores limites são de 10 kN para tração e 6 kN para compressão. **Obtenha o maior valor de P** que pode ser aplicado para que os valores solicitantes nessas barras não ultrapassem esses limites de projeto.

Escreva os valores obtidos nos espaços indicados na resposta.





$$1.\sum M_{(L)}=0=+\frac{\sqrt{3}}{2}P*10-Y_H*8\Longrightarrow Y_H=\frac{5\sqrt{3}}{8}P$$



$$2.\sum M_{(J)}=0=+\frac{\sqrt{3}}{2}P*6-\frac{5\sqrt{3}}{8}P*4-N_3*2\Longrightarrow N_3=+\frac{\sqrt{3}}{4}P$$

$$3.\sum Y=0=-\frac{\sqrt{3}}{2}P+\frac{5\sqrt{3}}{8}P-N_{11}*\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow N_{11}=+\frac{\sqrt{6}}{8}P$$

$$4.\sum M_{(C)}=0=-\frac{P}{2}*2+\frac{\sqrt{3}}{2}P*4-\frac{5\sqrt{3}}{8}P*2+N_{19}*2\Longrightarrow N_{19}=\frac{4-3\sqrt{3}}{8}P$$

$$5.\ N_3 = +\frac{\sqrt{3}}{4}P \leq 10 \Rightarrow P \leq \frac{40\sqrt{3}}{3} = 23,09\ kN$$

$$6.\ N_{11} = +\frac{\sqrt{6}}{8}P \leq 10 \Rightarrow P \leq \frac{40\sqrt{6}}{3} = 32,65\ kN$$

$$7.\ N_{19} = \frac{4-3\sqrt{3}}{8}P \geq -6 \Rightarrow P \leq \frac{48}{3\sqrt{3}-4} = 40,19\ kN$$

Respostas:

a)

$$N_3 = +\frac{\sqrt{3}}{4}P \qquad N_{11} = +\frac{\sqrt{6}}{8}P \qquad N_{19} = \frac{4-3\sqrt{3}}{8}P$$

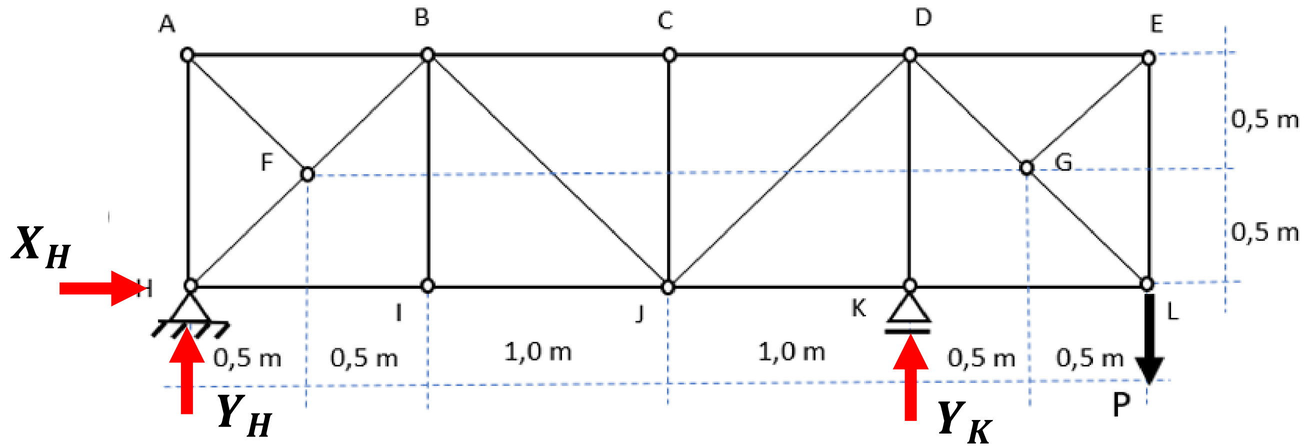
b) $P_{máx} = \frac{40\sqrt{3}}{3}kN$

PEF-3200 – 2ª Prova – 1/7/2020

EXERCÍCIO 6

Nº USP:____________________Nome:____

1ª Questão(3,0 pontos) Na treliça plana da figura, a força vertical de P kN está aplicada em L. Determine os esforços normais nas barras BC, BJ, BI e HI em função de P. Sabendo que essas barras suportam um esforço normal máximo de compressão igual a $6\sqrt{2}$ kN e um esforço normal máximo de tração igual a 10 kN, determine o maior valor possível de P sem que haja a ruptura das barras BC, BJ, BI e HI.

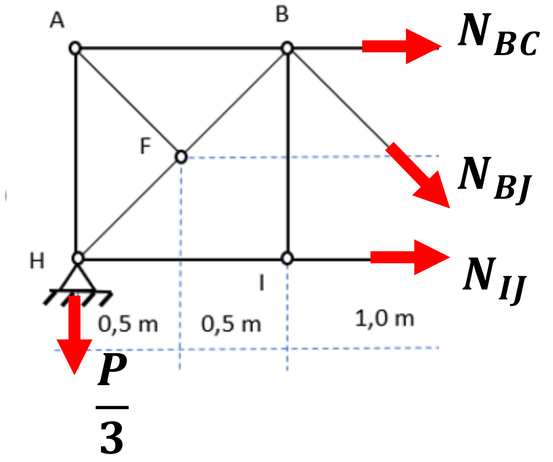


1. Reações no apoio H

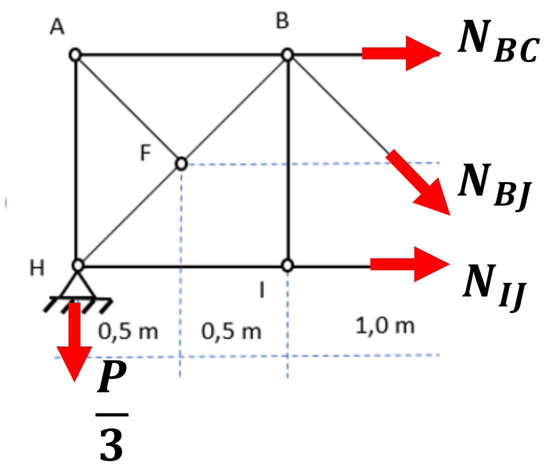
$$\sum X = 0 = X_H \Longrightarrow X_H = 0$$

$$\sum M_{(K)} = 0 = -Y_H * 3 - P * 1 \Longrightarrow Y_H = -\frac{P}{3}$$

2. Ritter



2. *Ritter*

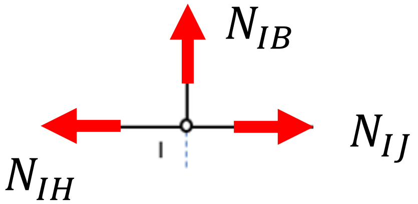


$$\sum M(J) = 0 = \frac{P}{3} * 2 - N_{BC} * 1 \Longrightarrow N_{BC} = \frac{2P}{3}$$

$$\sum M(B) = 0 = \frac{P}{3} * 1 + N_{IJ} * 1 \Longrightarrow N_{IJ} = -\frac{P}{3}$$

$$\sum Y = 0 = -\frac{P}{3} - N_{BJ} * \cos 45^{o} \Longrightarrow N_{BJ} = -\frac{P\sqrt{2}}{3}$$

3. *Equilíbrio do nó I*



$$\sum Y = 0 = N_{IB} \Longrightarrow N_{IB} = 0$$

$$\sum X = 0 = -N_{IH} + N_{IJ} \;\; e \;\; N_{IJ} = -\frac{P}{3} \Longrightarrow N_{IH} = -\frac{P}{3}$$

4. *Maior valor de P*

$$\begin{cases} N_{IH} = -\dfrac{P}{3} \geq -6\sqrt{2} \Longrightarrow P \leq 18\sqrt{2}\, kN \\ N_{BJ} = -\dfrac{P\sqrt{2}}{3} \geq -6\sqrt{2} \Longrightarrow P \leq 18\, kN \\ N_{BC} = \dfrac{2P}{3} \leq 10 \Longrightarrow P \leq 15\, kN \end{cases}$$

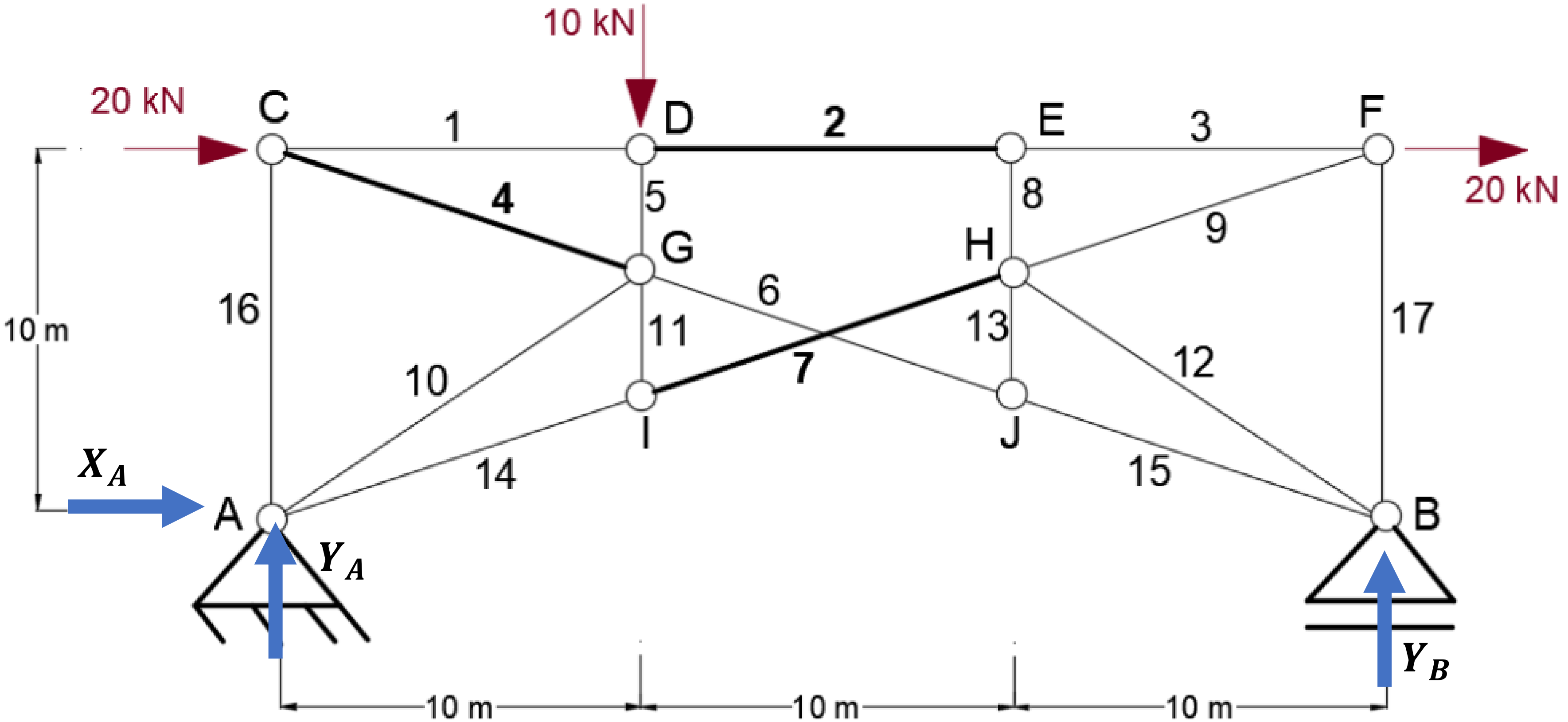
$$\boxed{Logo, P_{máx} = 15\, kN}$$

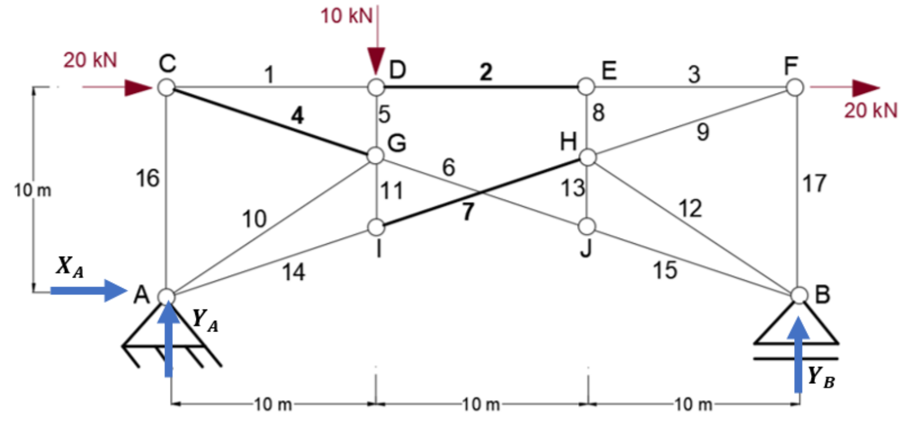
EXERCÍCIO 7

PEF-3200 – Segunda Prova – 21/07/2021

Nº USP:____________________Nome:____

1ª Questão (3,5 ptos) Para a treliça da figura a seguir, obtenha, usando pelo menos uma vez o processo de Ritter, os esforços normais nas barras 2 (DE),4 (CG) e 7 (HI), identificando-os por N_2, N_4 e N_7, respectivamente. Use unidade em kN. Explicite todas as passagens dos cálculos empregados na resolução para melhor avaliação, usando pelo menos 3 casas decimais.





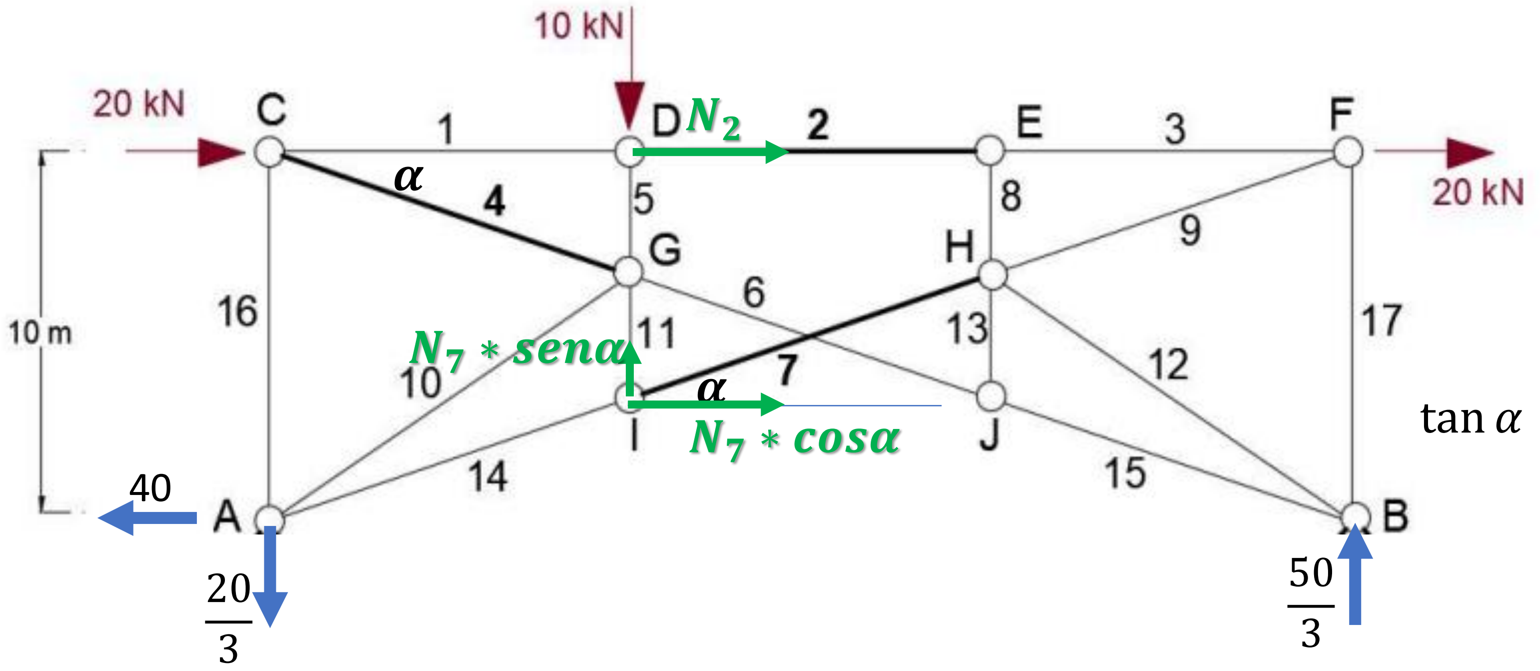
1. Reações nos apoios

$$\sum M_{(A)} = 0 = -20 * 10 - 10 * 10 - 20 * 10 + Y_B * 30 \Longrightarrow Y_B = \frac{50}{3}$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -20 * 10 + 10 * 20 - 20 * 10 - Y_A * 30 \Longrightarrow Y_A = -\frac{20}{3}$$

$$\sum X = 0 = X_A + 20 + 20 \Longrightarrow X_A = -40$$

2. Diagrama do corpo livre

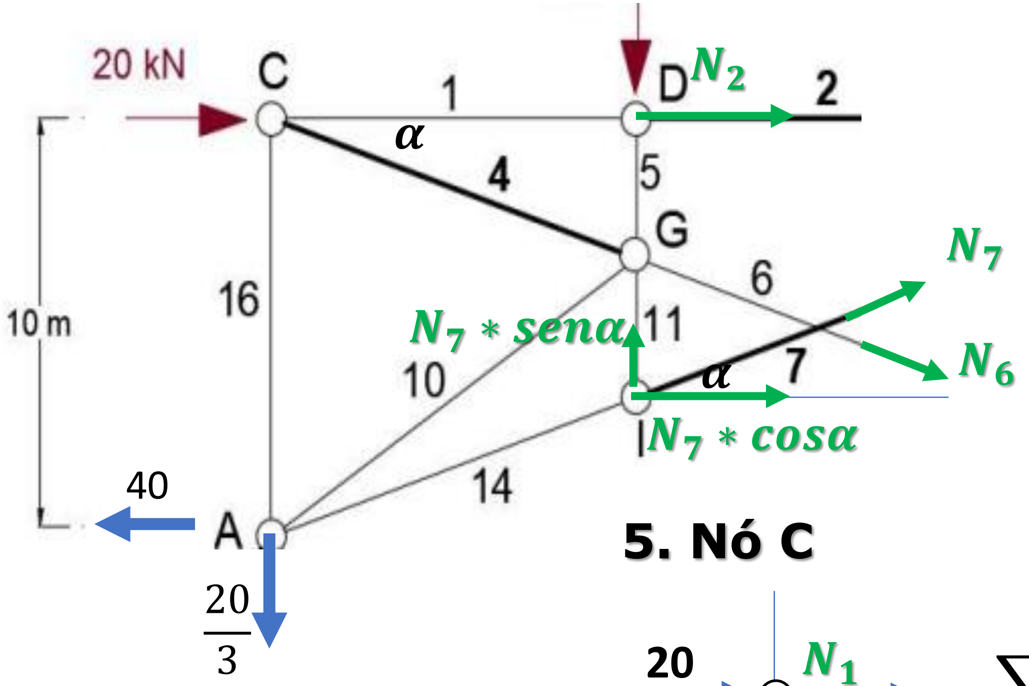


$$\tan\alpha = \frac{\frac{10}{3}}{10} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \sin\alpha = 0{,}316 \;\; e \;\; \cos\alpha = 0{,}949$$

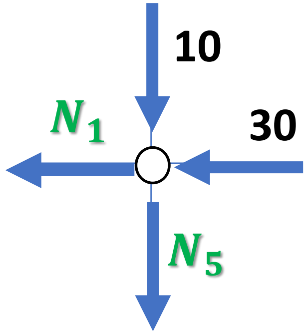
3. Ritter s-s

$$\sum M_{(C)} = 0 = -40 * 10 - 10 * 10 + N_7 * sen\alpha * 10 + N_7 * cos\alpha * \frac{20}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{N_7 = 52,704}$$

$$\sum M_{(G)} = 0 = -20 * \frac{10}{3} - N_2 * \frac{10}{3} - 40 * \frac{20}{3} + \frac{20}{3} * 10 + N_7 * cos\alpha * \frac{10}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{N_2 = -30,00}$$

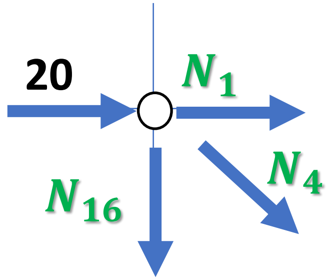


4. Nó D



$$\sum X = 0 = -N_1 - 30 \Longrightarrow N_1 = -30$$

5. Nó C



$$\sum X = 0 = 20 + N_1 + N_4 * cos\alpha \Longrightarrow \boldsymbol{N_4 = 10,540}$$

EXERCÍCIO 8

APOSTILA
CAPÍTULO 6
PÁGINAS 114 A 118

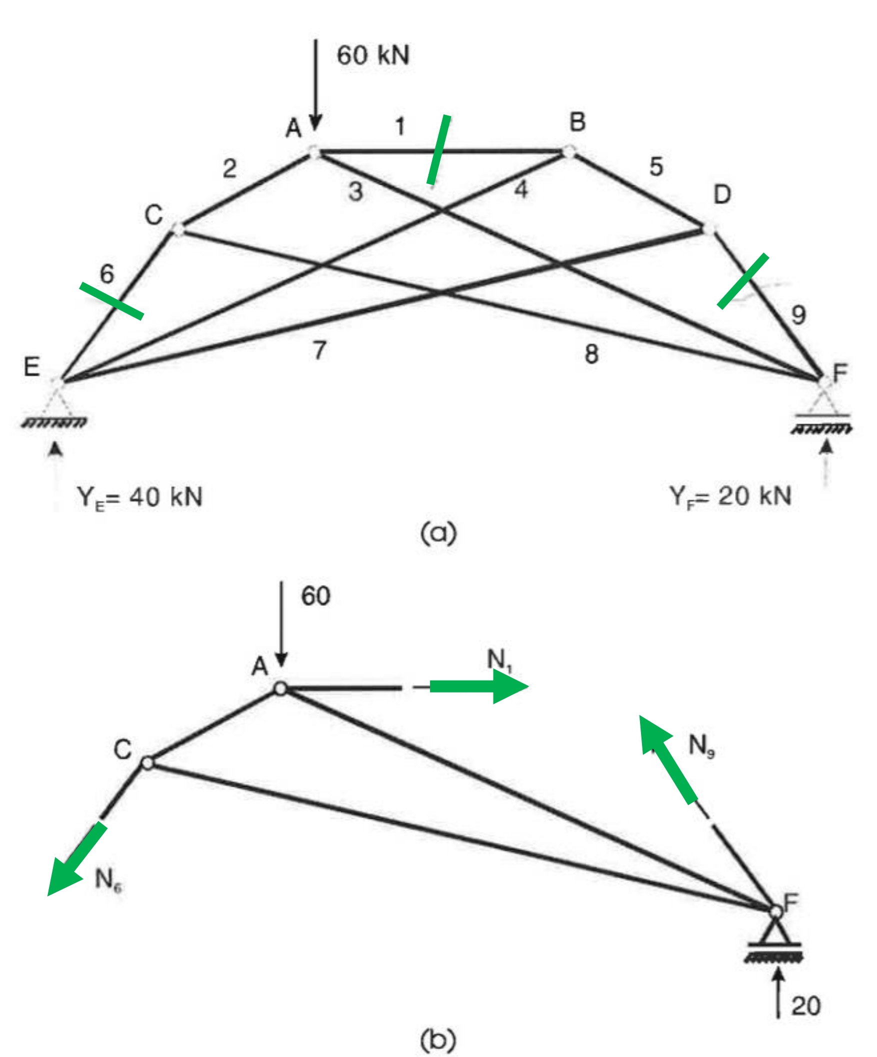


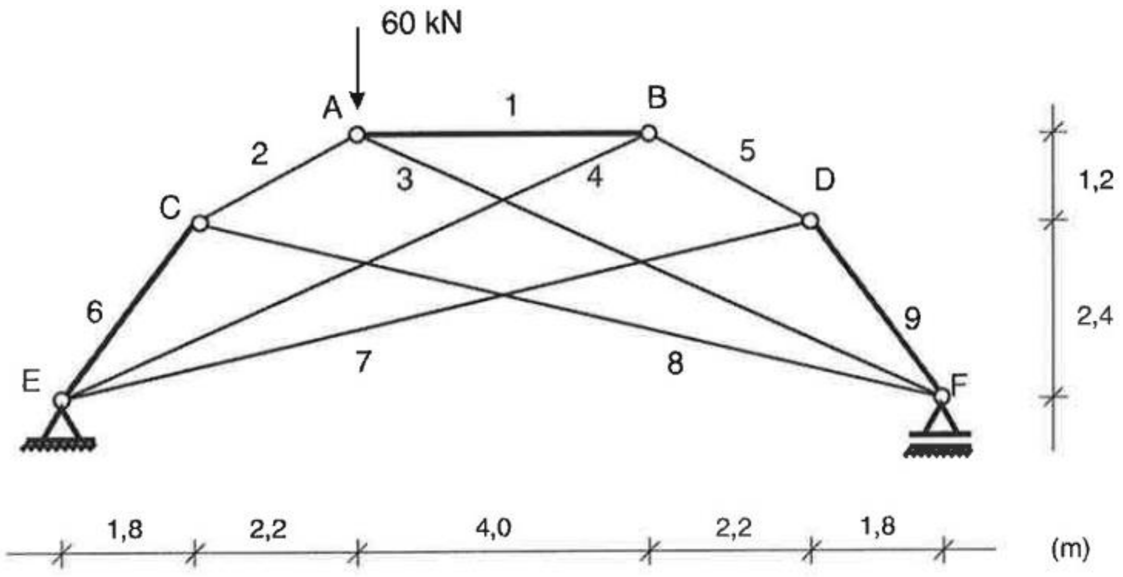
Tabela 7.4

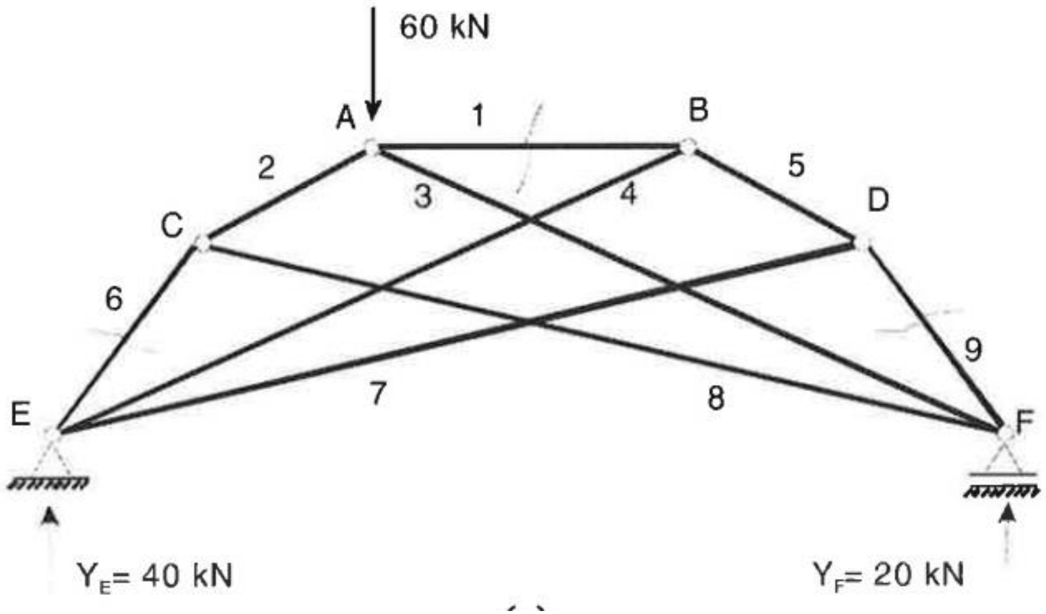
Barra	Força normal (kN)
1	– 54,55
2	– 96,74
3	– 33,32
4	32,78
5	– 28,09
6	– 70,46
7	12,73
8	43,84
9	– 20,46

RITTER:

Se a estrutura está em equilíbrio, então qualquer parte desta estrutura, separada por um corte imaginário, também está em equilíbrio. Corte em barras que separem a estrutura em duas.

CORTE EM TRÊS BARRAS NÃO PARALELAS E NÃO CONCORRENTES NO MESMO PONTO



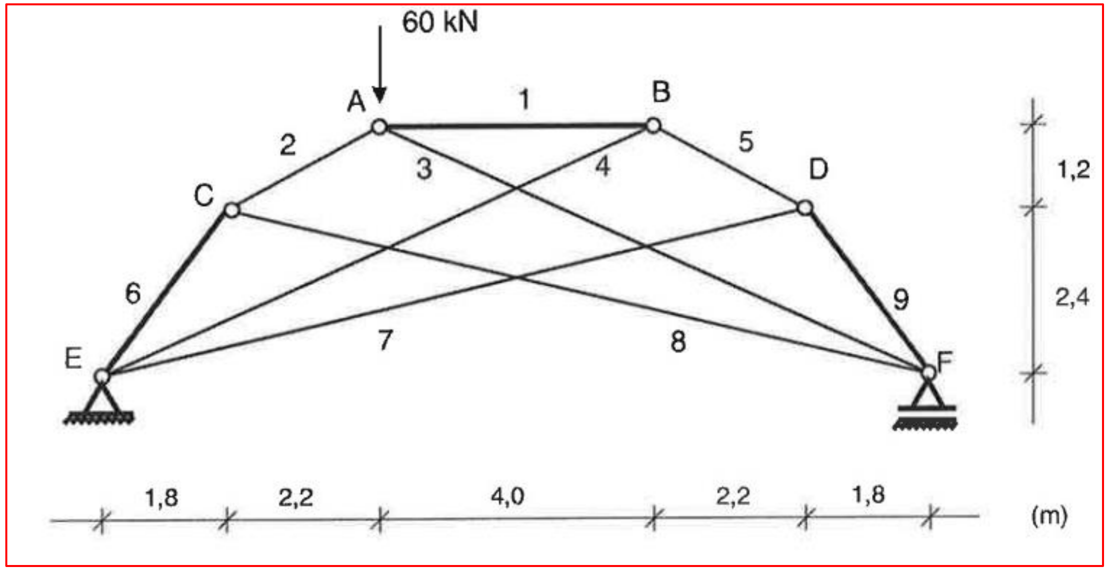


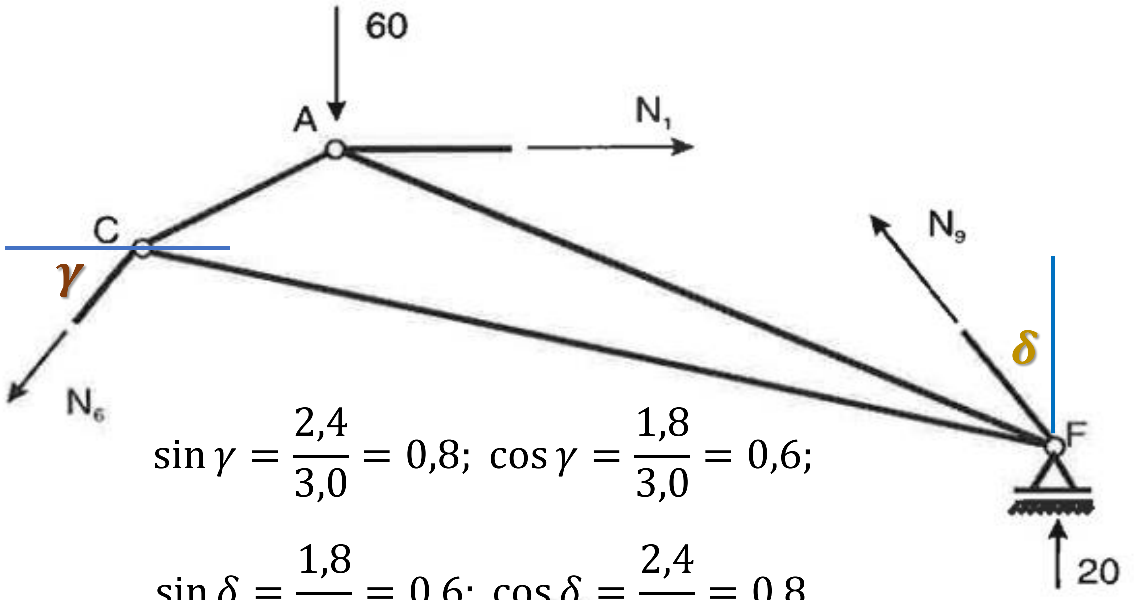
1. Reações nos apoios

$$\sum M_{(E)} = 0 = Y_F * 12 - 60 * 4 \Longrightarrow Y_F = 20\ kN$$

$$\sum M_{(F)} = 0 = -Y_E * 12 + 60 * 8 \Longrightarrow Y_E = 40\ kN$$

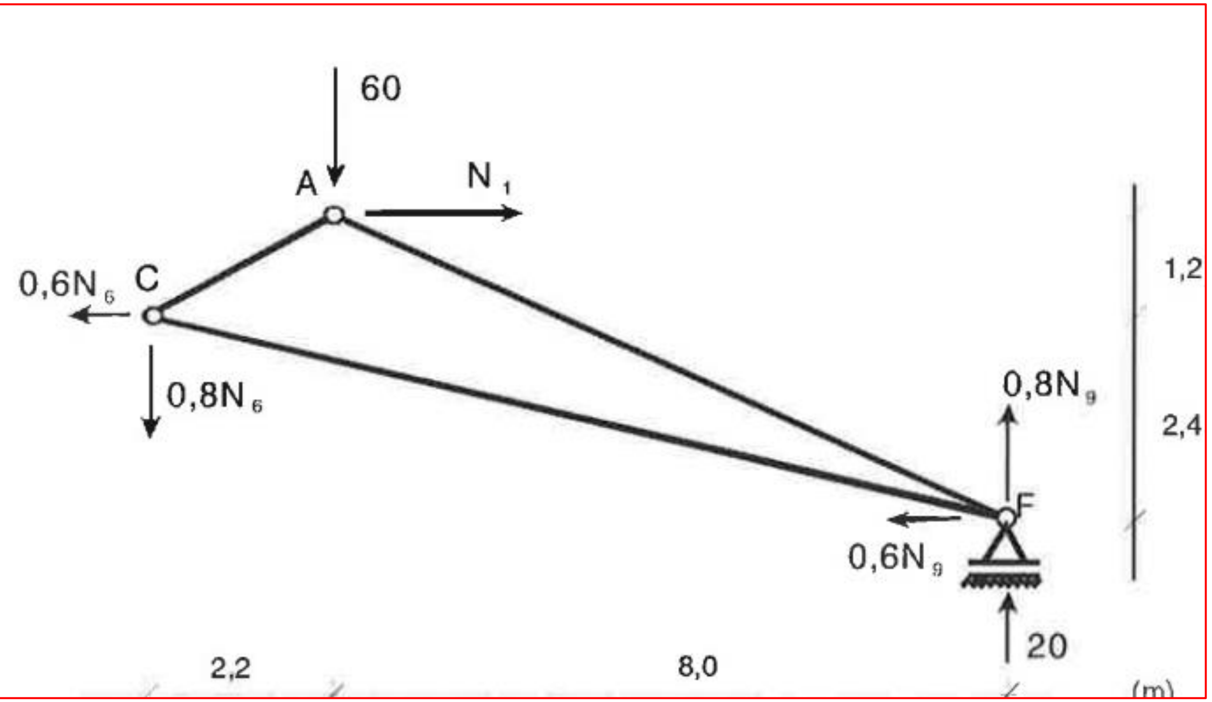
$$\sum X = 0 = X_E \Longrightarrow X_E = 0\ kN$$





$$\sin\gamma = \frac{2,4}{3,0} = 0,8;\ \cos\gamma = \frac{1,8}{3,0} = 0,6;$$

$$\sin\delta = \frac{1,8}{3,0} = 0,6;\ \cos\delta = \frac{2,4}{3,0} = 0,8$$



$$\sum X = 0 \qquad -0,6\ N_6 + N_1 - 0,6\ N_9 = 0$$

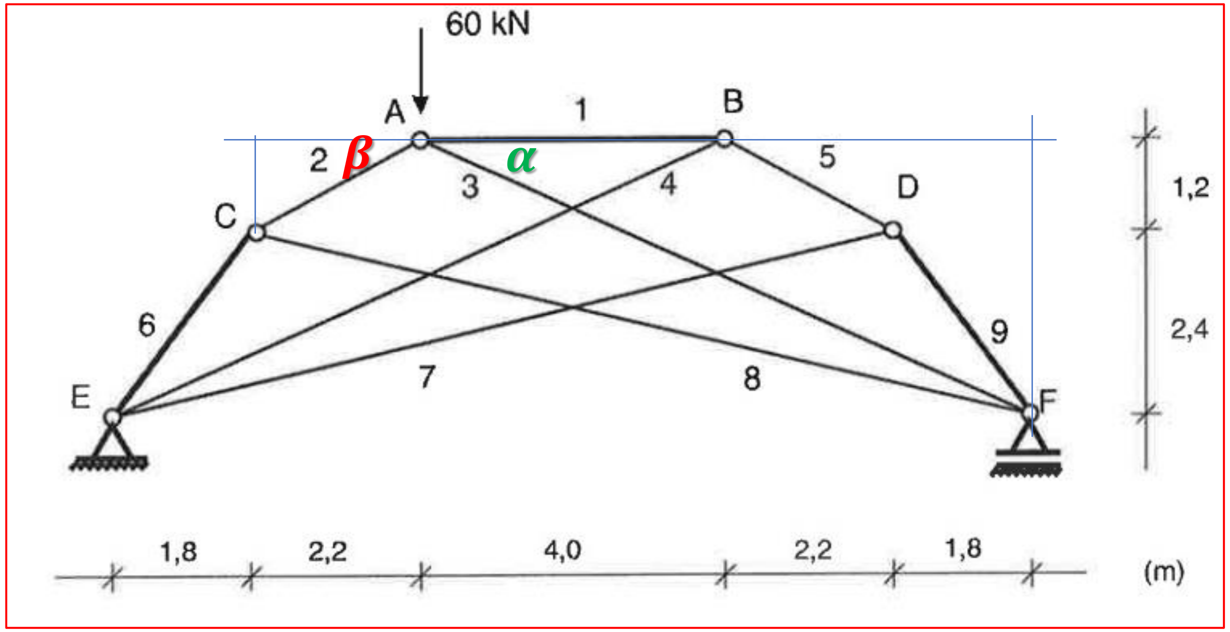
$$\sum Y = 0 \qquad -0,8\ N_6 - 60 + 0,8\ N_9 + 20 = 0$$

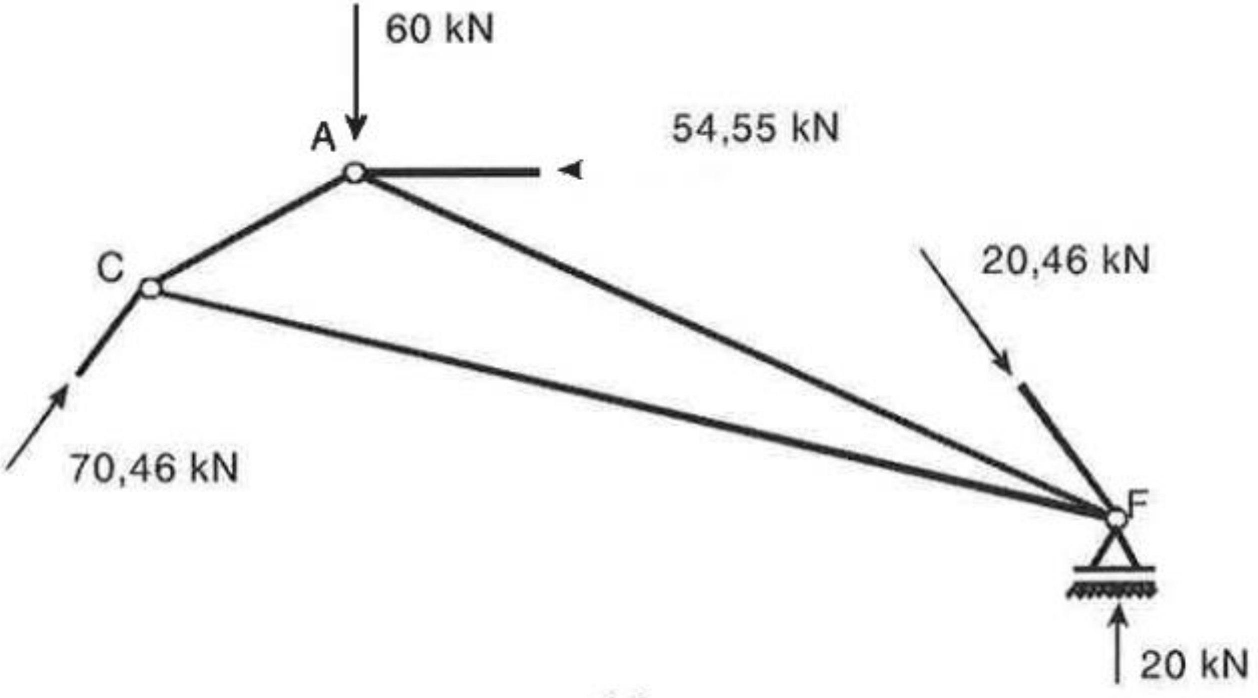
$$\sum M_F = 0 \qquad 0,8\ N_6 \cdot 10,2 + 0,6\ N_6 \cdot 2,4 + 60 \cdot 8 - N_1 \cdot 3,6 = 0$$

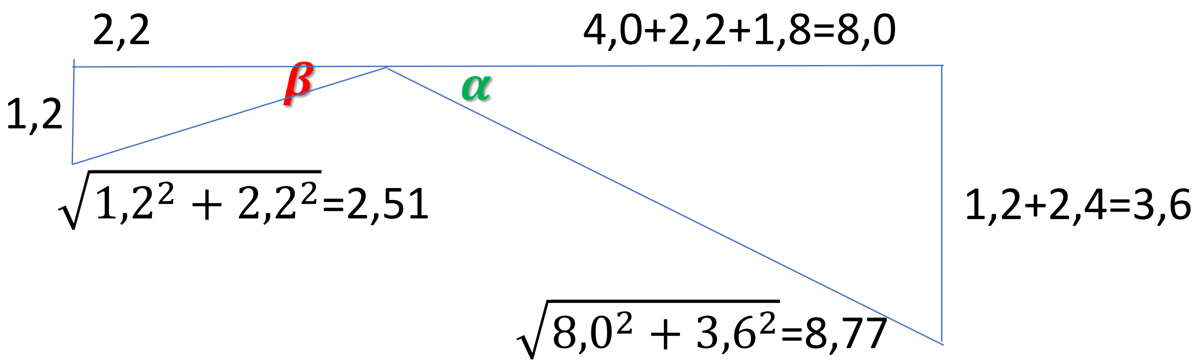
$$N_1 = -54,55\ kN$$

$$N_6 = -70,46\ kN$$

$$N_9 = -20,46\ kN$$

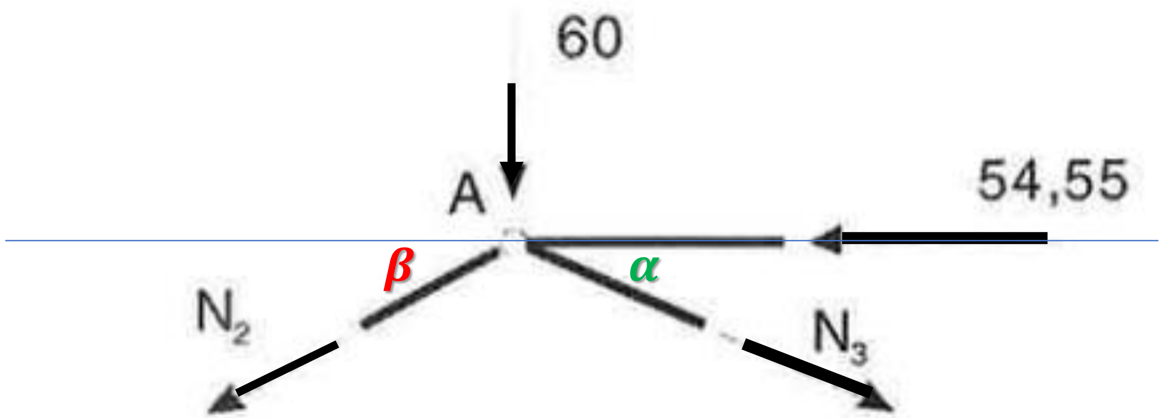


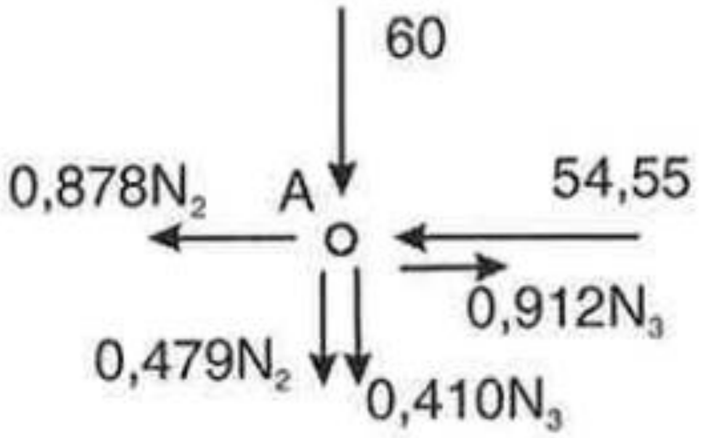




$$\sin\alpha = \frac{3{,}6}{8{,}77} = 0{,}410;\ \cos\alpha = \frac{8{,}0}{8{,}77} = 0{,}912;$$

$$sin\,\beta = \frac{1{,}2}{2{,}505} = 0{,}479;\ cos\,\beta = \frac{2{,}2}{2{,}505} = 0{,}878$$

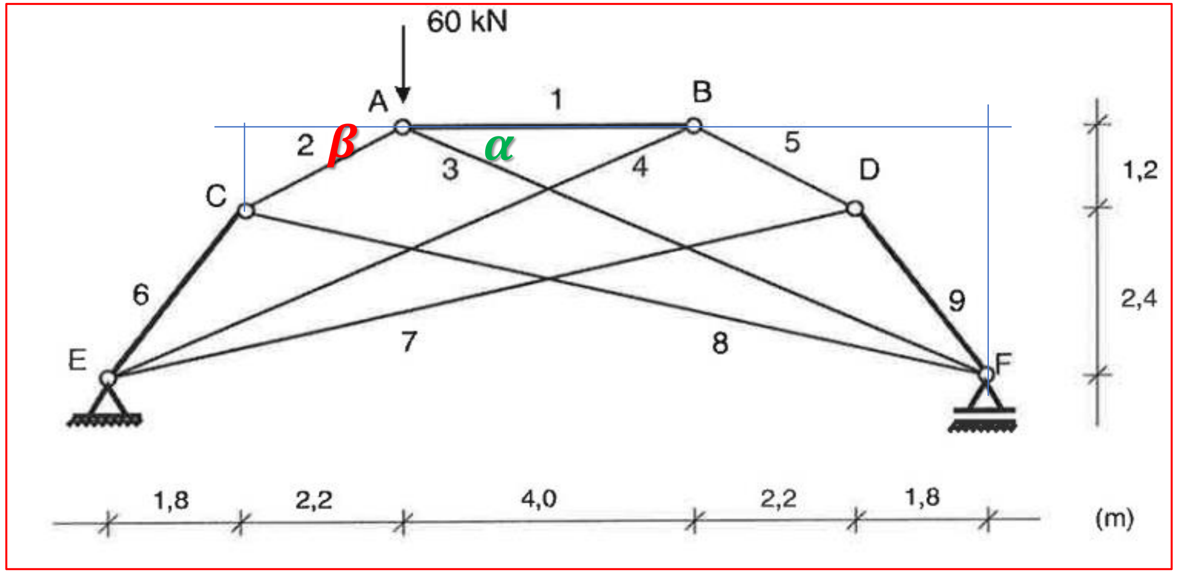


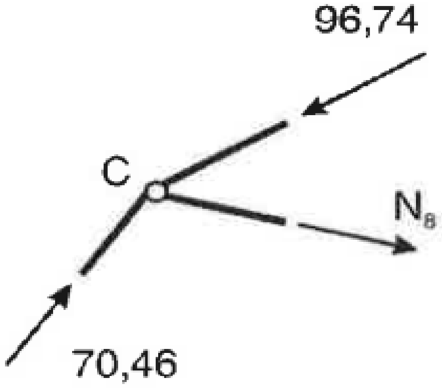


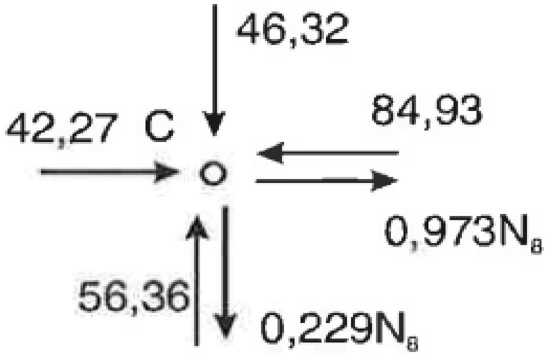
$$\sin\alpha = \frac{3,6}{8,77} = 0,410;\ \cos\alpha = \frac{8,0}{8,77} = 0,912;\ sin\,\beta = \frac{1,2}{2,505} = 0,479;\ cos\,\beta = \frac{2,2}{2,505} = 0,878$$

$$\sum X = 0 \qquad -0,878\,N_2 - 54,55 + 0,912\,N_3 = 0 \qquad N_2 = -96,74\ kN$$

$$\sum Y = 0 \qquad -0,479\,N_2 - 60 - 0,410\,N_3 = 0 \qquad N_3 = -33,32\ kN$$



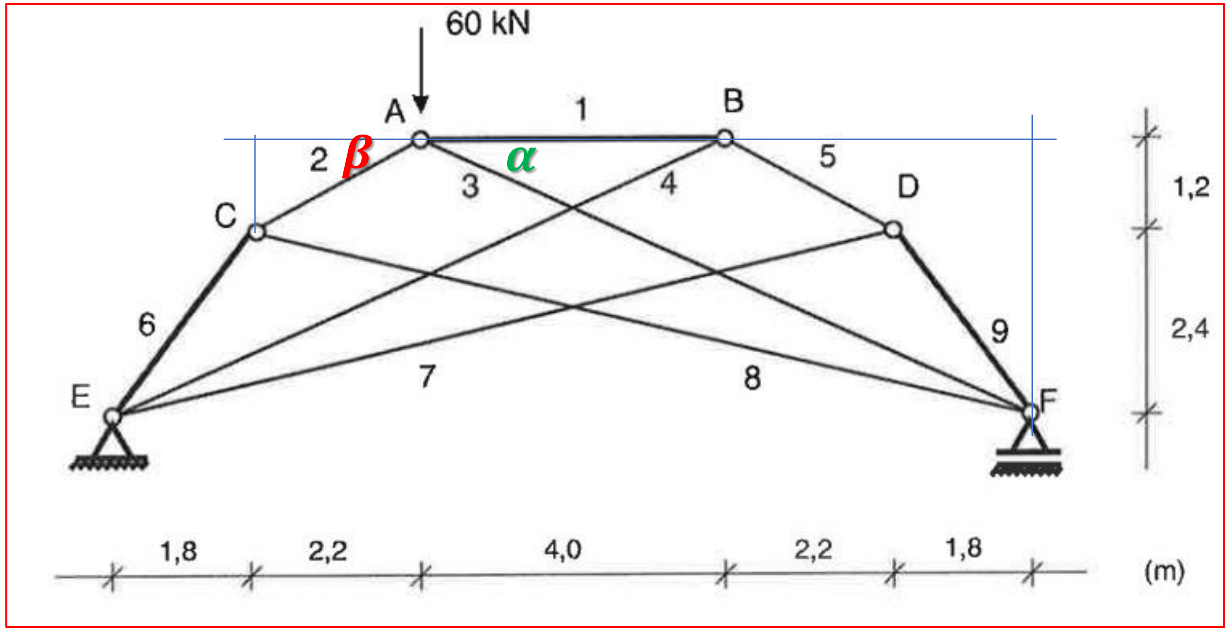


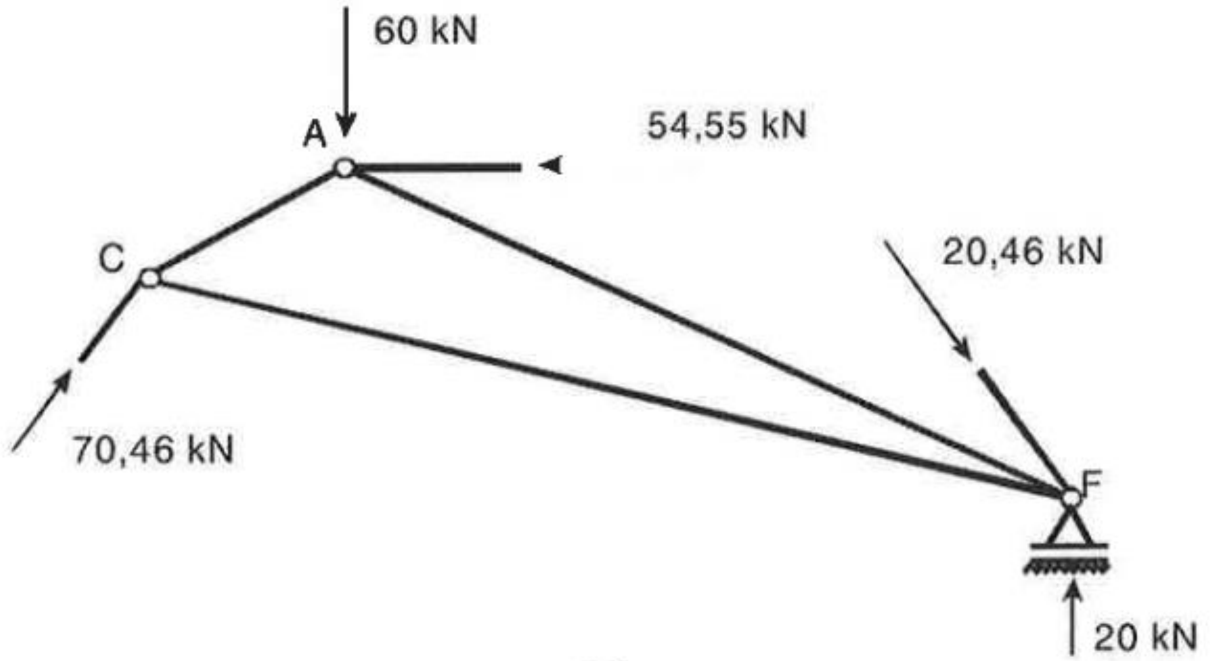


$$\sum X = 0 \qquad 42{,}27 - 84{,}93 + 0{,}973\, N_8 = 0$$

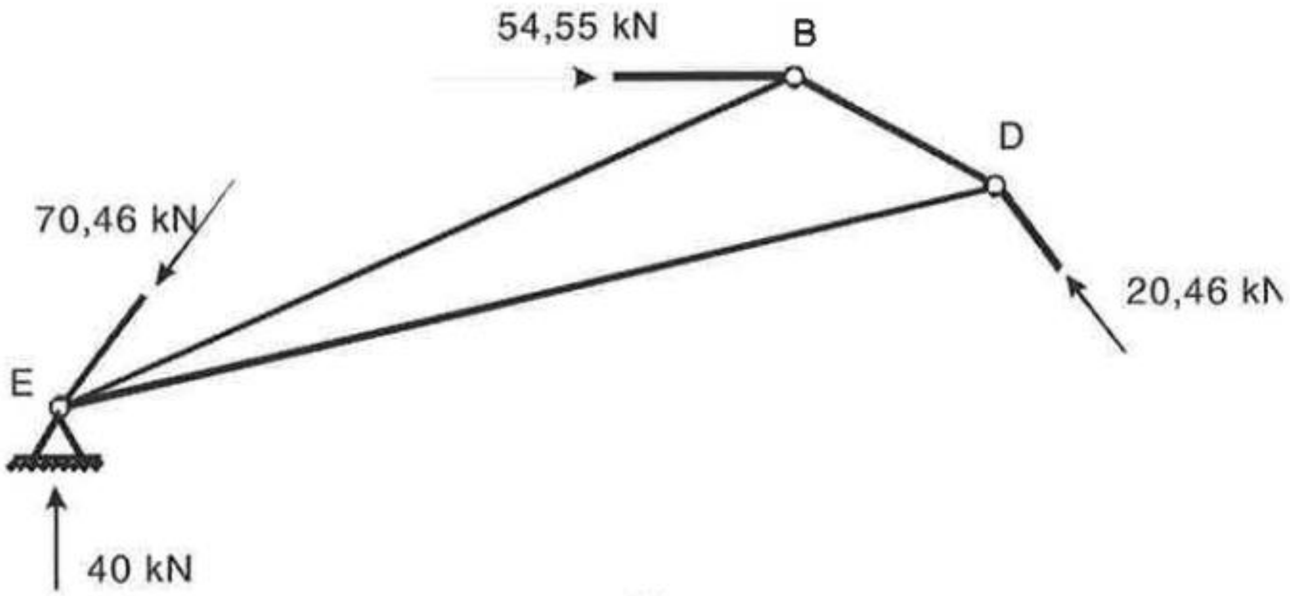
$$\sum Y = 0 \qquad 56{,}36 - 46{,}32 - 0{,}229\, N_8 = 0$$

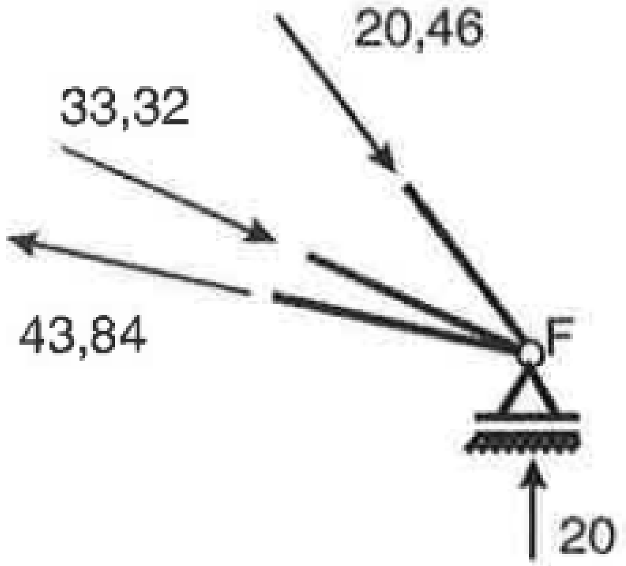
$$N_8 = 43{,}84\ kN$$

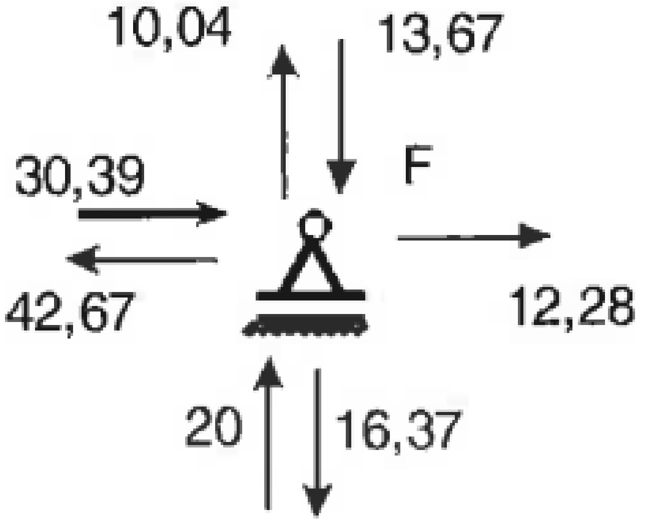

60 kN
A
1
B
2
β
α
3
4
5
C
D
6
9
E
7
8
F
1,2
2,4
1,8
2,2
4,0
2,2
1,8
(m)


60 kN
A
54,55 kN
C
20,46 kN
70,46 kN
F
20 kN

(a)


54,55 kN
B
D
70,46 kN
20,46
E
40 kN





$$\sum X = -\,42{,}67 + 30{,}39 + 12{,}28 = 0$$

$$\sum Y = 10{,}04 - 13{,}67 - 16{,}37 + 20 = 0$$

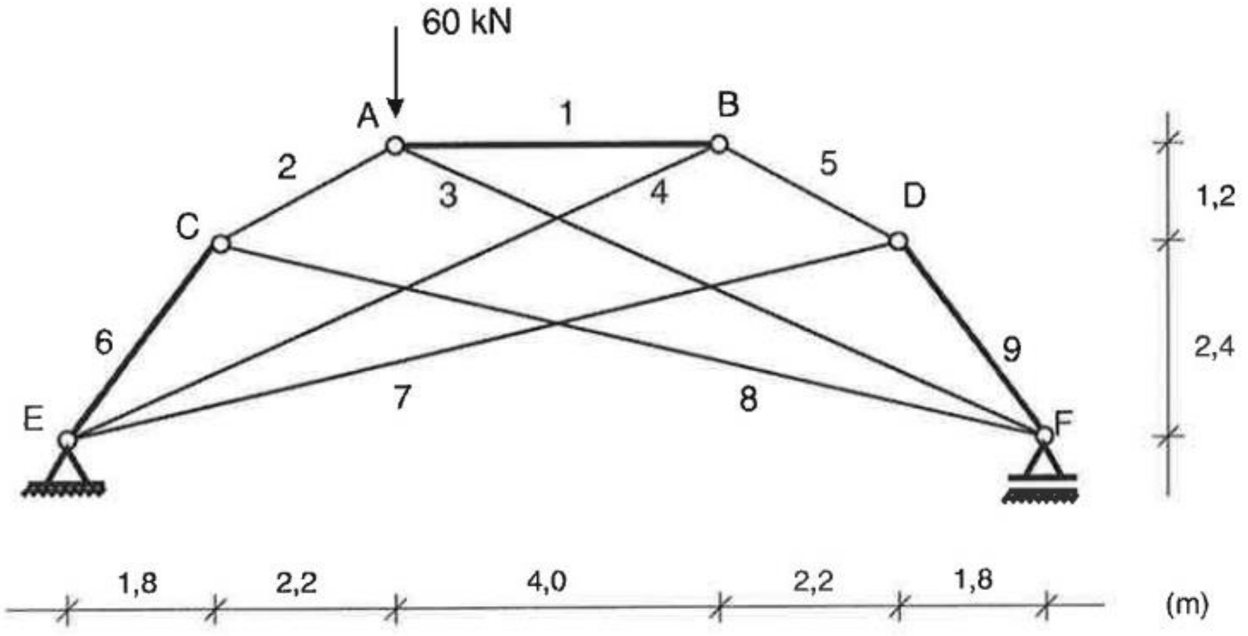


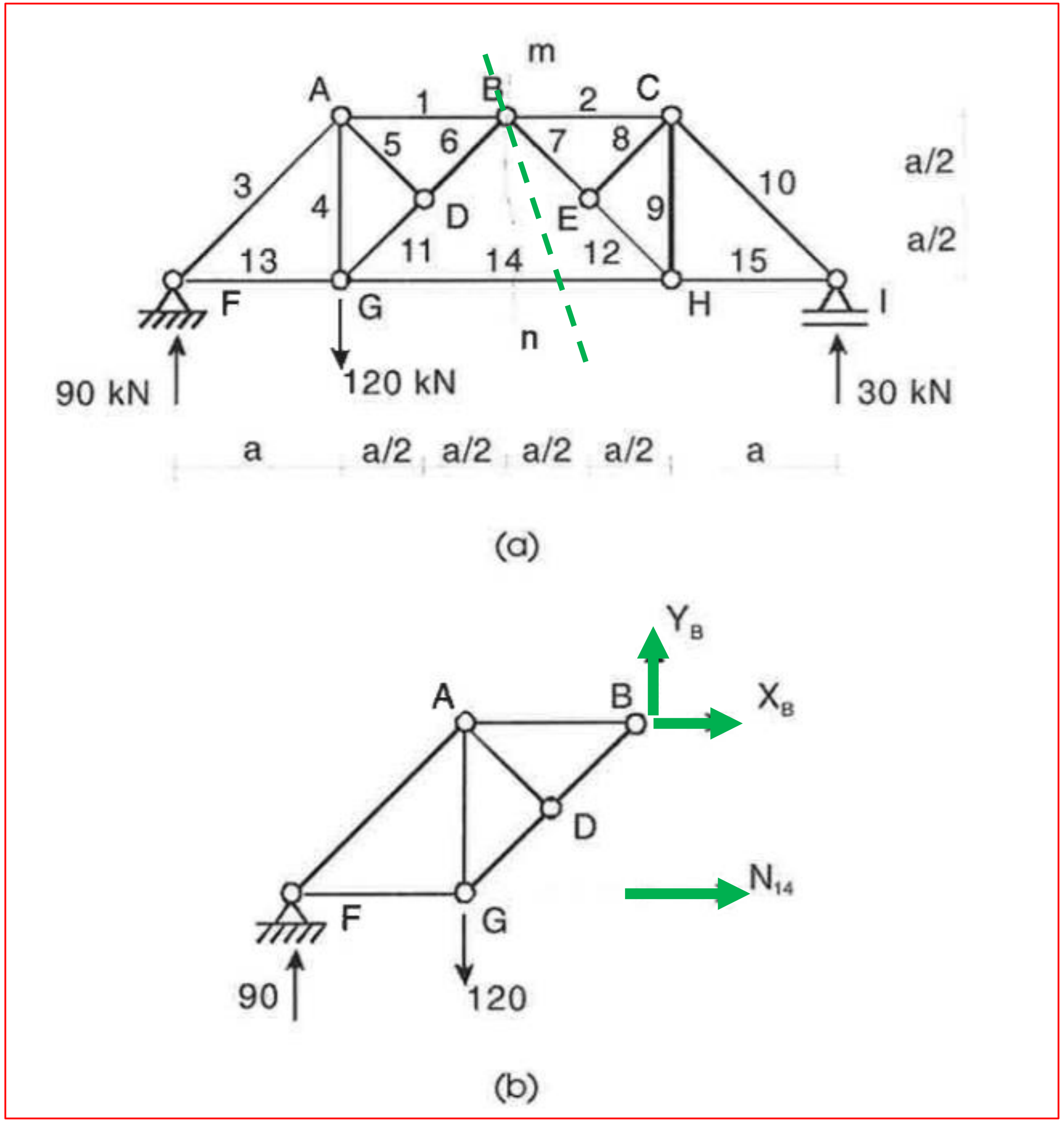
Tabela 7.4

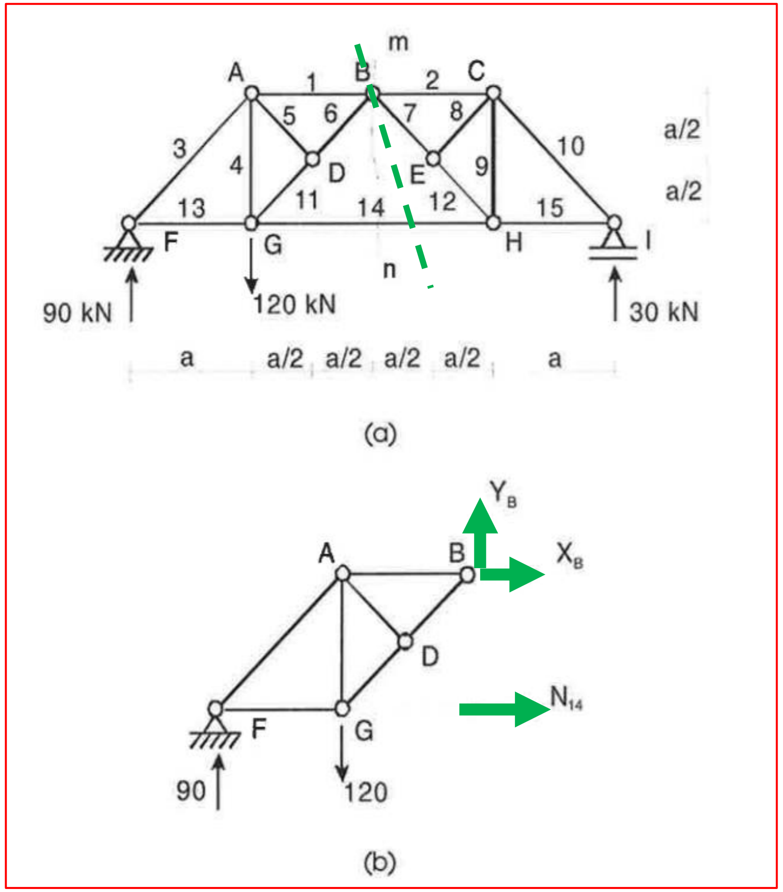
Barra	Força normal (kN)
1	– 54,55
2	– 96,74
3	– 33,32
4	32,78
5	– 28,09
6	– 70,46
7	12,73
8	43,84
9	– 20,46

EXERCÍCIO 9

Determinar os esforços no nó B
e na barra 14

RITTER: CORTE NO NÓ E NA BARRA





$$\sum Y = 0 = +90 - 120 + Y_E \Longrightarrow Y_B = 30\ kN$$

$$\sum M_{(B)} = 0 = -90 * 2a + 120 * a + N_{14} * a \Longrightarrow N_{14} = 60\ kN$$

$$\sum X = 0 = X_B + N_{14} \Longrightarrow X_B = -60\ kN$$

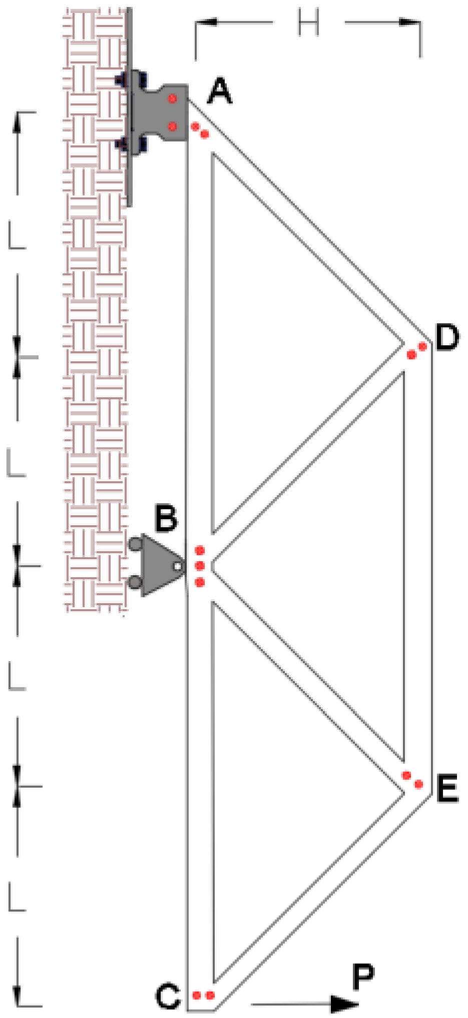
PEF-3200 – Segunda Prova – 08/06/2022

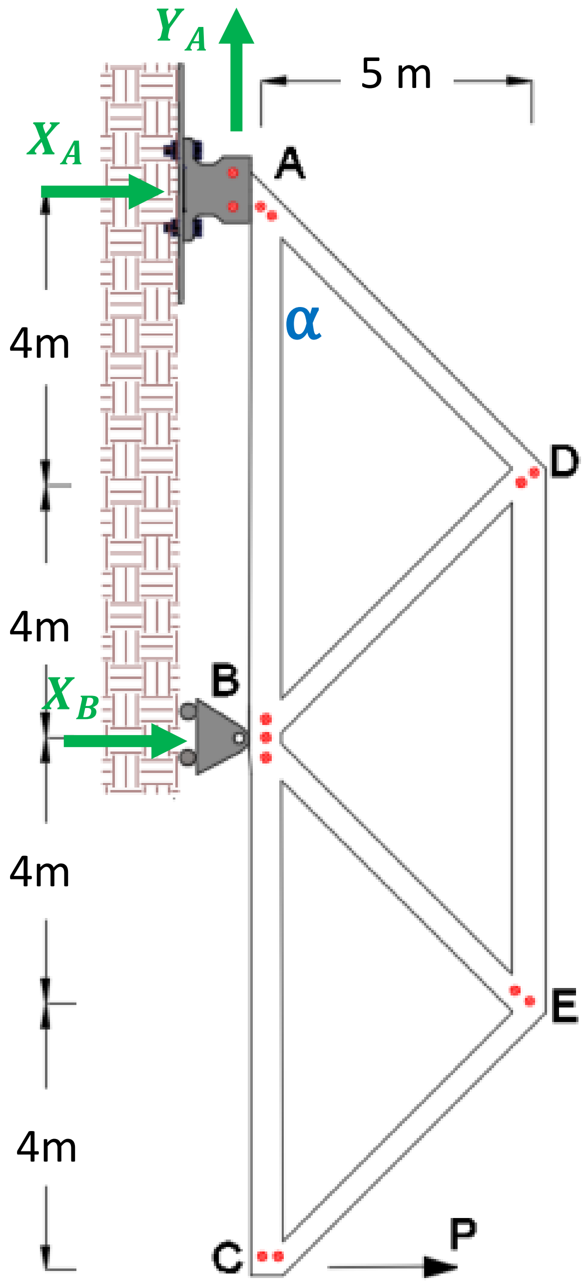
Nº USP:____________________Nome:____

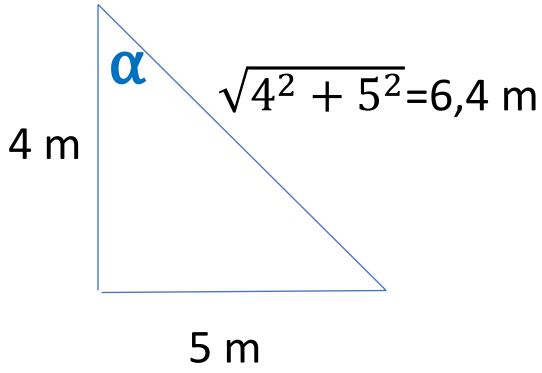
3ª Questão (3 ptos): Para a treliça da figura, considere H = 5000 mm e L = 4000 mm. Sabendo-se que em todas as barras não se pode ultrapassar os valores de 400 kN à tração e 350 kN à compressão. Obtenha os esforços em todas as barras em termos de P e em seguida obtenha o maior valor possível para a força P na direção e sentido indicado. Indique a resposta na tabela.

Resposta:

N_{AB}	**0,8.P**
N_{AD}	**-P/(cos38) = - 1,281.P**
N_{BD}	**P/(cos38) = 1,281.P**
N_{BE}	**P/(cos38) = 1,281.P**
N_{DE}	**-1,6.P**
N_{BC}	**0,8.P**
N_{EC}	**-P/(cos38) = - 1,281.P**
P_{max}	**218,75 kN**







$$\sin\alpha = \frac{5}{6{,}4} = 0{,}78;\ \cos\alpha = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}63$$

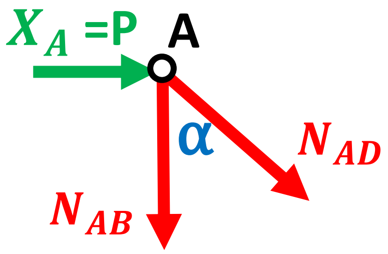
1. Reações nos apoios

$$\sum M_{(A)} = 0 = +X_B * 8 + P * 16 \Longrightarrow X_B = -2P$$

$$\sum X = 0 = X_A + X_B + P \Longrightarrow X_A = P$$

$$\sum Y = 0 = Y_A \Longrightarrow Y_A = 0$$

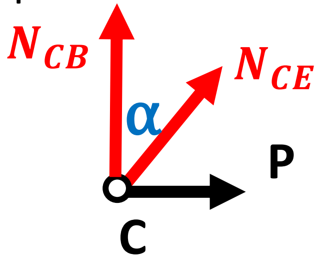
2. Equilíbrio do nó A



$$\sum X = 0 = P + N_{AD} * \sin\alpha \Longrightarrow N_{AD} = -\frac{P}{\sin\alpha} = -1{,}28P$$

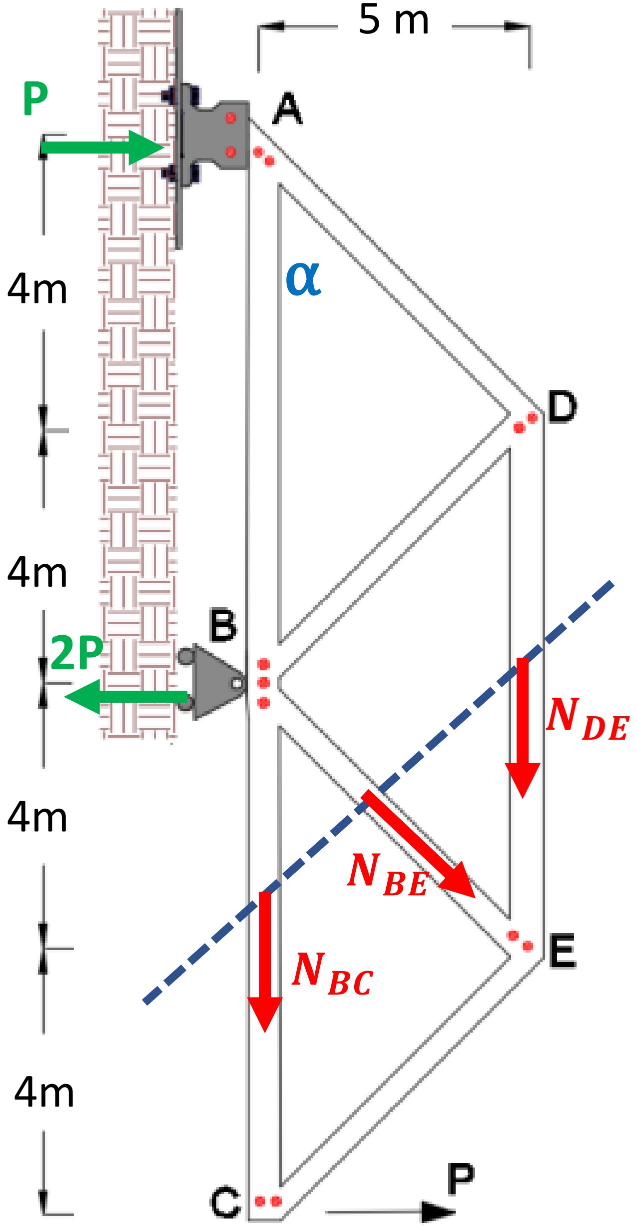
$$\sum Y = 0 = -N_{AB} - N_{AD} * \cos\alpha \Longrightarrow N_{AB} = 0{,}8P$$

3. Equilíbrio do nó C



$$\sum X = 0 = P + N_{CE} * \sin\alpha \Longrightarrow N_{CE} = -\frac{P}{\sin\alpha} = -1{,}28P$$

$$\sum Y = 0 = +N_{CB} - N_{CE} * \cos\alpha \Longrightarrow N_{CB} = 0{,}8P$$



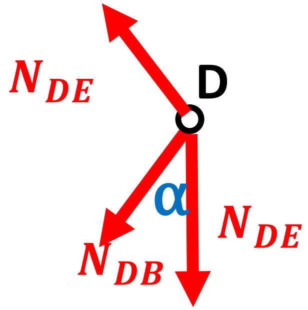
$$\sin\alpha = \frac{5}{6{,}4} = 0{,}78;\ \cos\alpha = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}63$$

4. Ritter (equilíbrio da parte de cima)

$$\sum M_{(B)} = 0 = -N_{DE} * 5 - P * 8 \Longrightarrow N_{DE} = -\frac{8}{5}P = -1{,}6P$$

$$\sum X = 0 = -2P + N_{BE} * \sin\alpha + P \Longrightarrow N_{BE} = \frac{P}{\sin\alpha} = 1{,}28P$$

5. Equilíbrio do nó D



$$\sum X = 0 = -N_{DE} * \sin\alpha - N_{DB} * \sin\alpha \Longrightarrow N_{DB} = +1{,}6P$$

N_{AD}	-1,28P
N_{AB}	+0,8P
N_{BD}	+1,28P
N_{BE}	+1,28P
N_{BC}	+0,8P
N_{DE}	-1,6P
N_{CE}	-1,28P

6. P Máximo

Máxima compressão:

$$-1{,}6P \geq -350 \Longrightarrow P \leq 218\ kN$$

Máxima tração:

$$1{,}28P \leq 400 \Longrightarrow P \leq 312\ kN$$

Portanto, $P_{máx} = 218\ kN$