



USP

TRELIÇAS

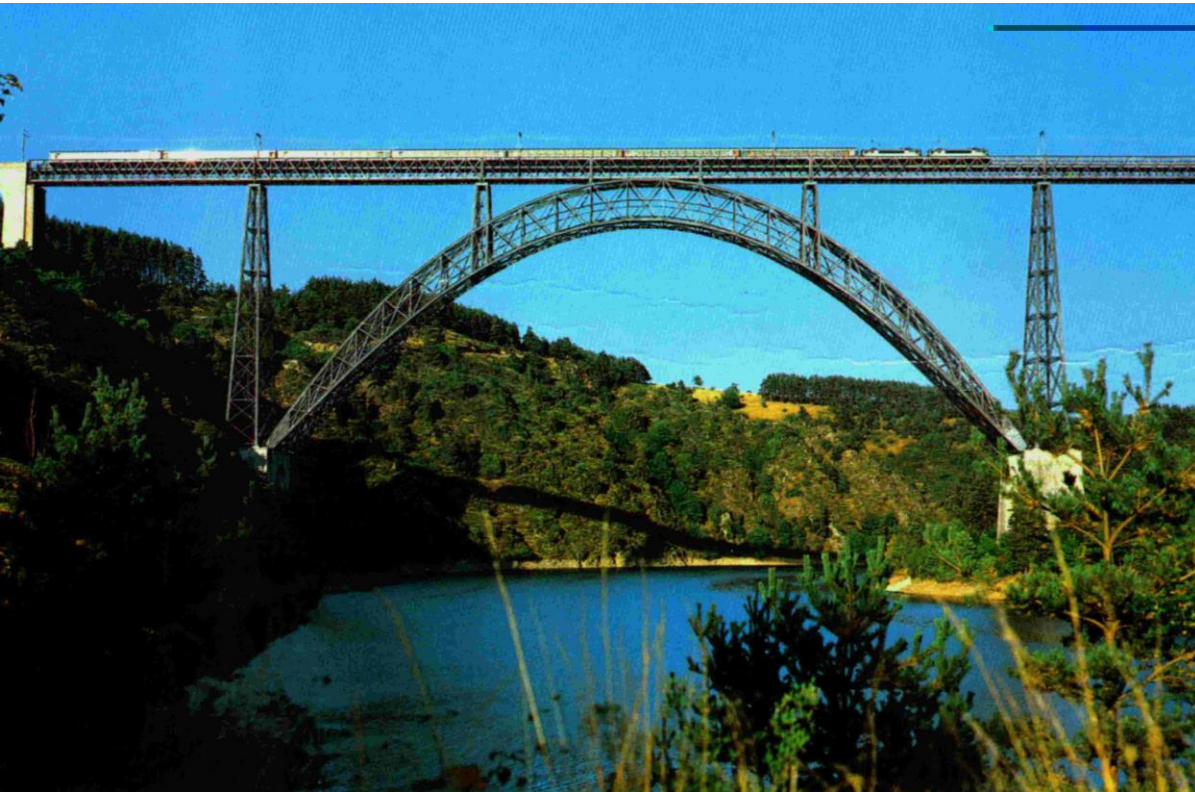
Valério S. Almeida
Maio/2023

Capítulo 7 da apostila
págs. de 48 a 128

TRELIÇAS

Treliça: uma das principais estruturas na engenharia

Solução prática econômica



Vence grandes vãos

Suportam cargas pesadas

Ideal para



Pontes

Coberturas

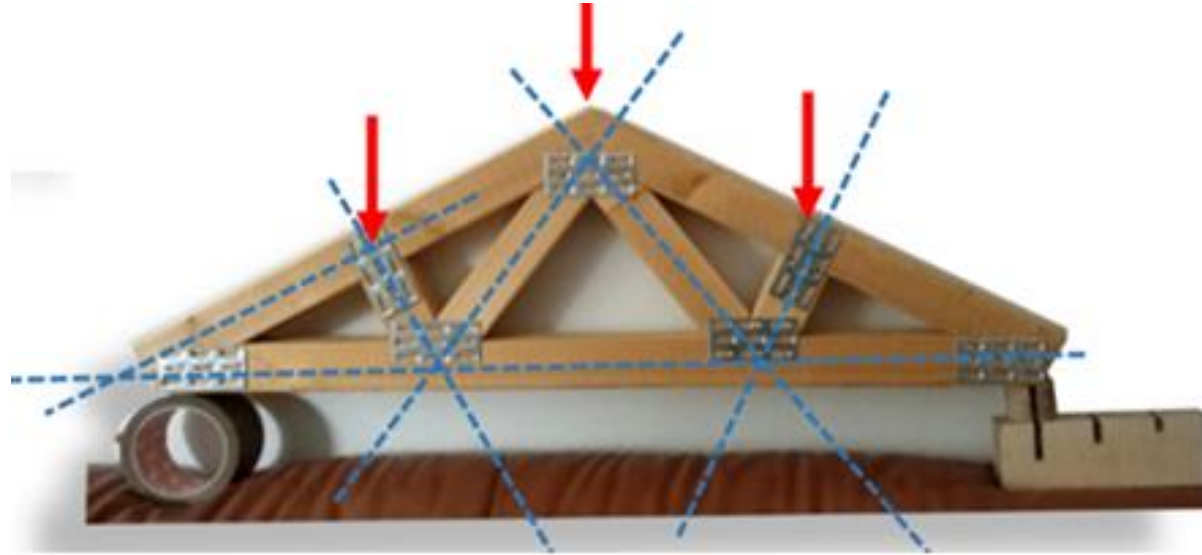
Torres



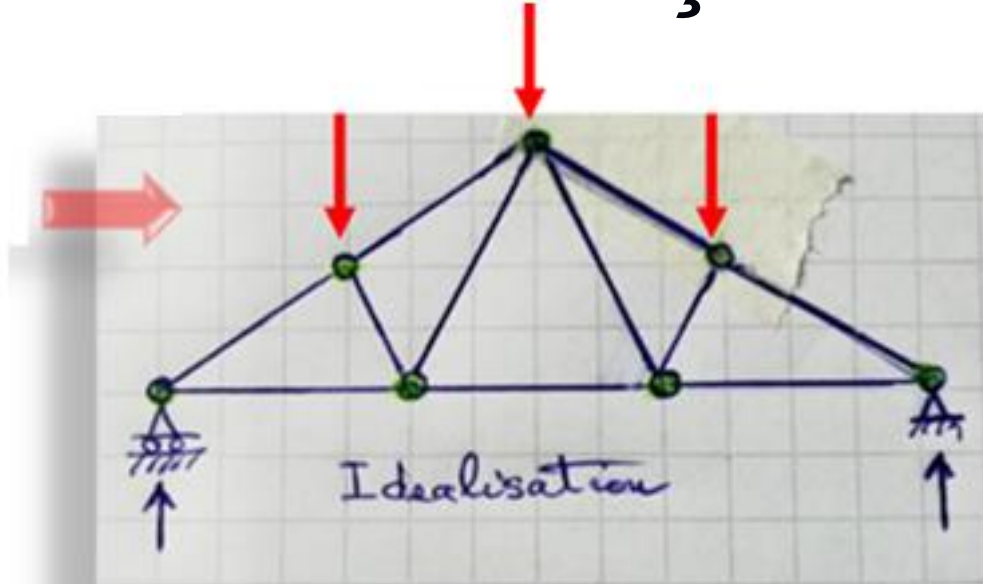




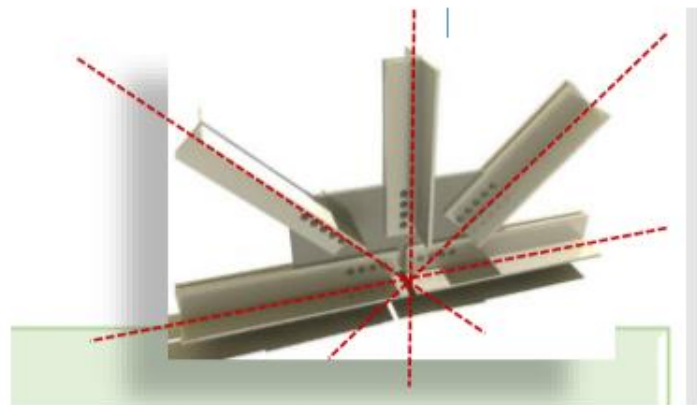
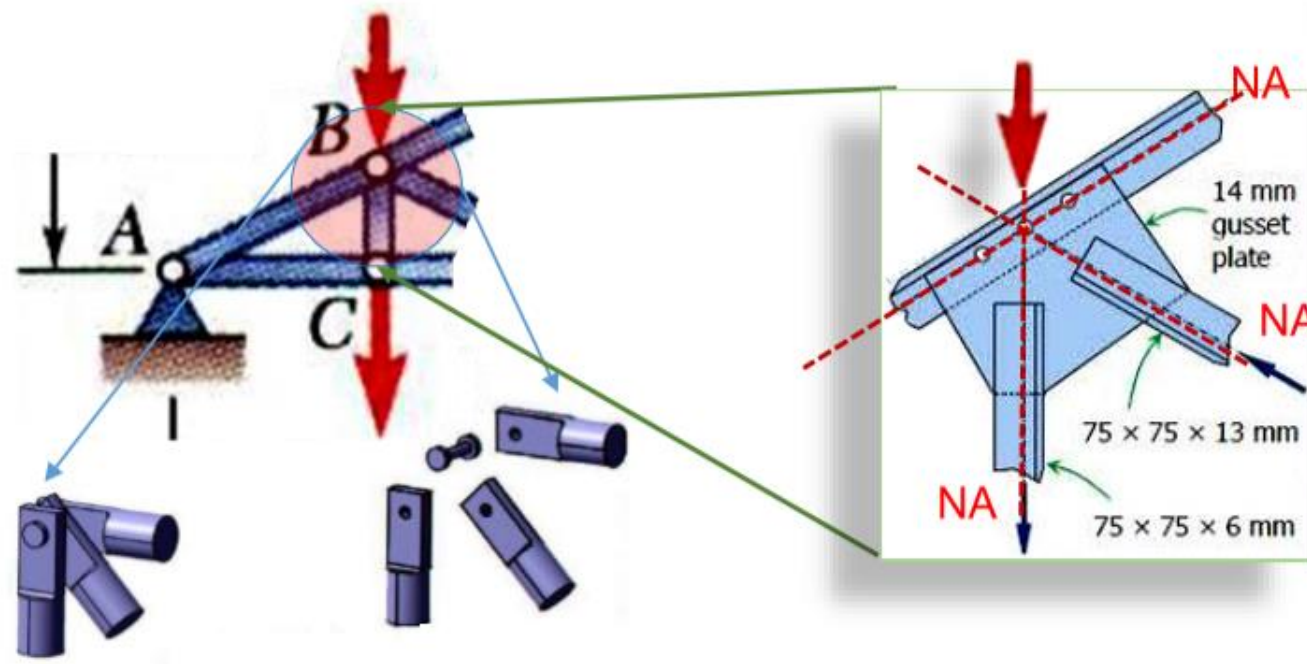
TRELIÇAS IDEAL



Idealização



LIGAÇÃO



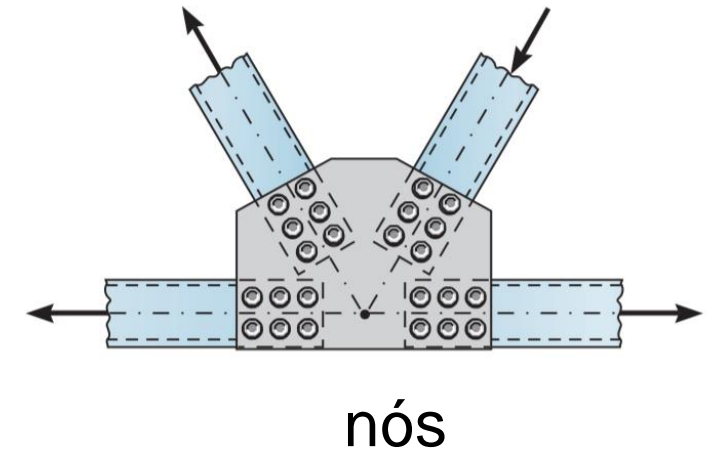
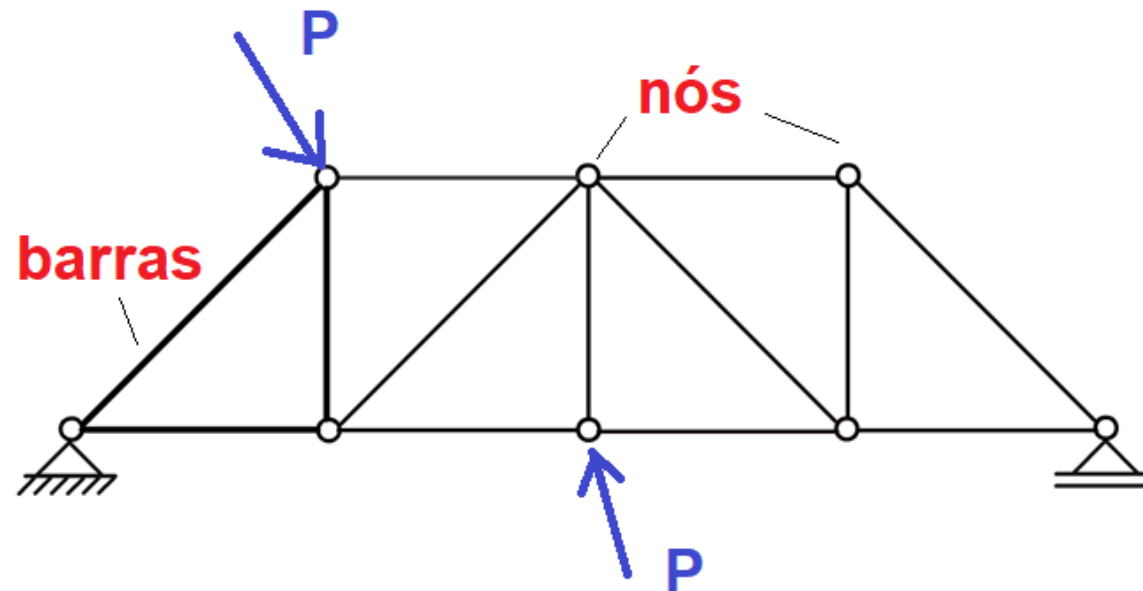
TRELIÇA IDEAL

Formadas: barras conectadas nas ligações por nós

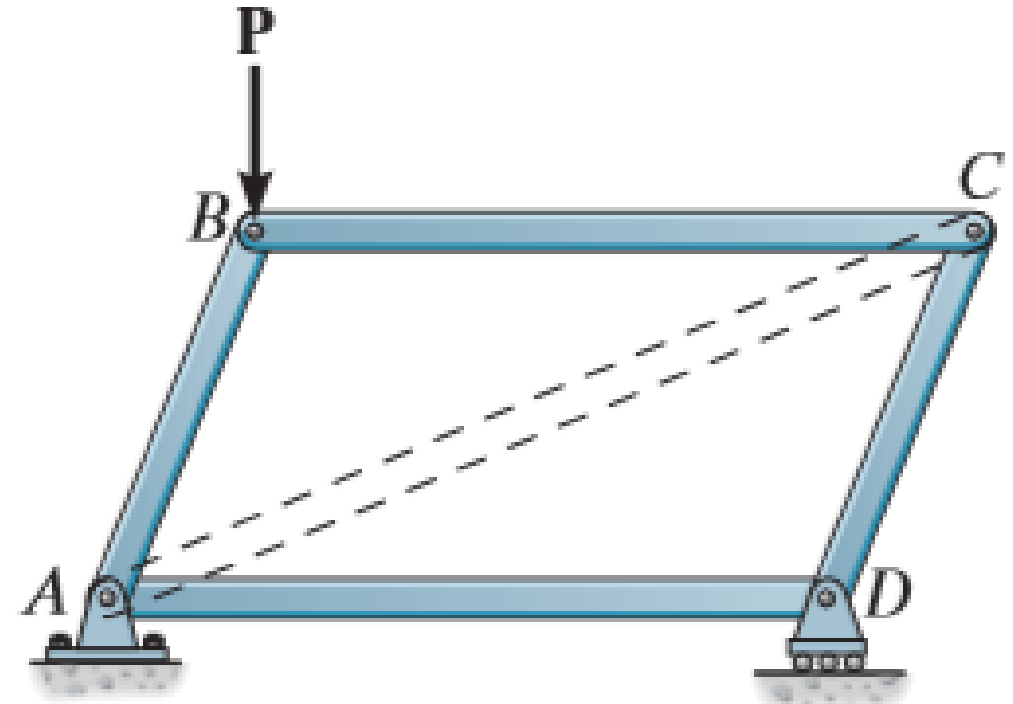
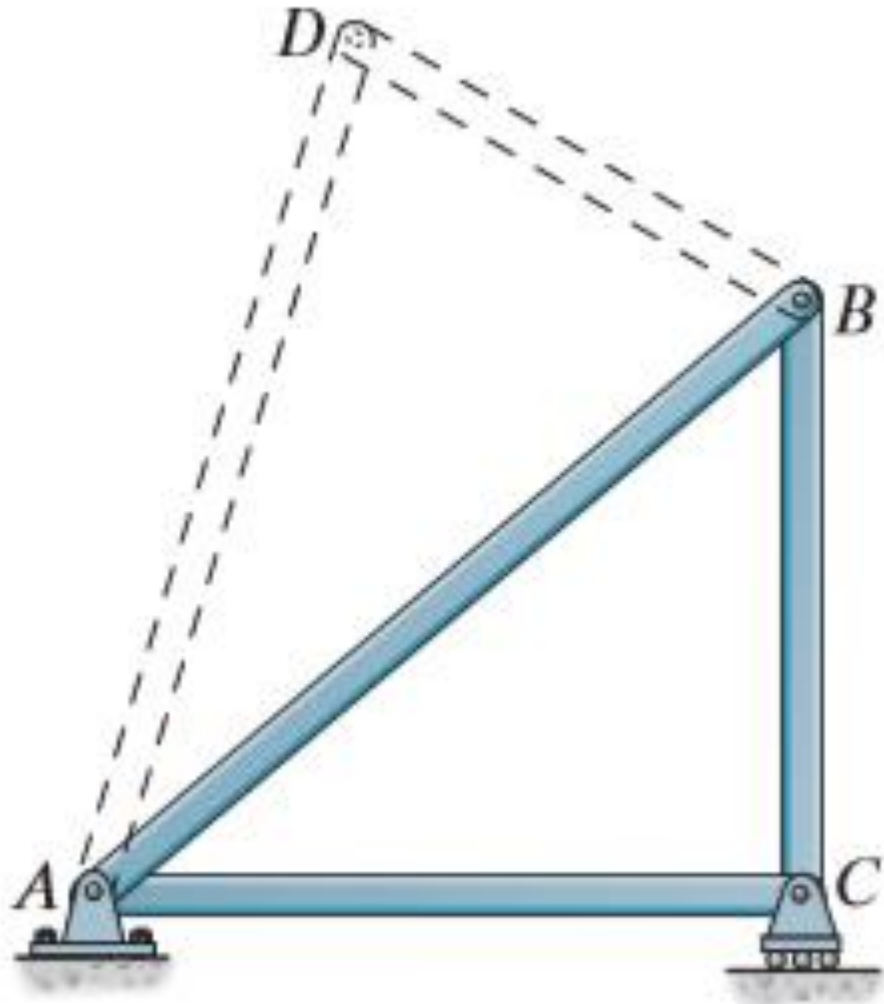
Estruturas com forças somente em nós

Barras esbeltas e retas

Lei de formação básica: triângulos

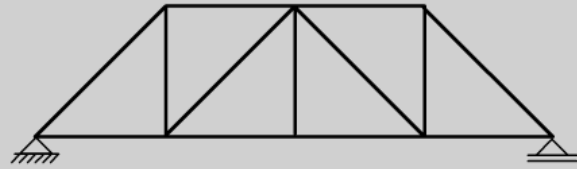


TRELIÇAS - FORMAÇÃO

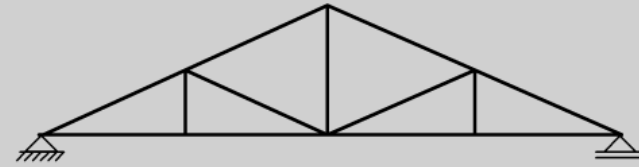


TRELIÇAS - FORMAÇÃO

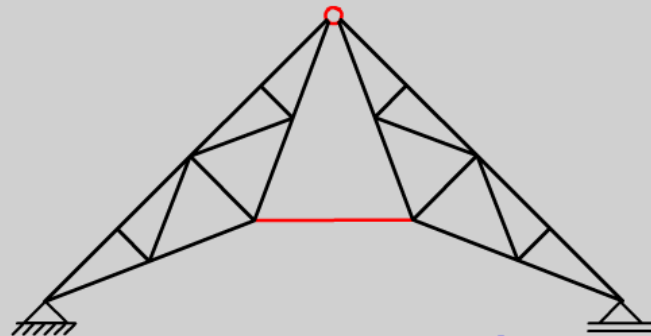
Métodos de formação de treliças



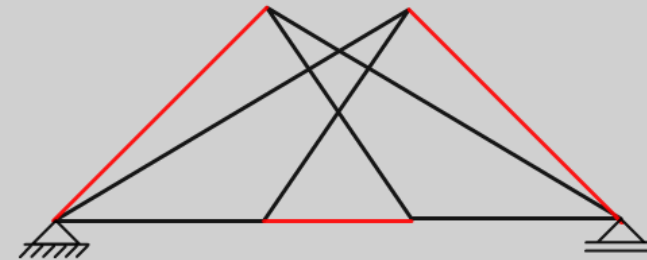
treliça simples utilizada
em pontes



treliça simples utilizada
em coberturas



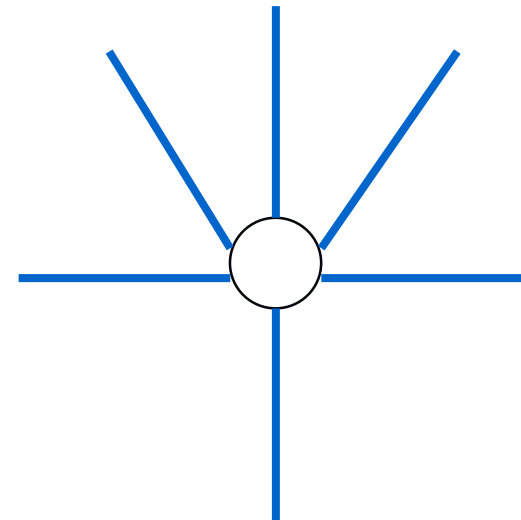
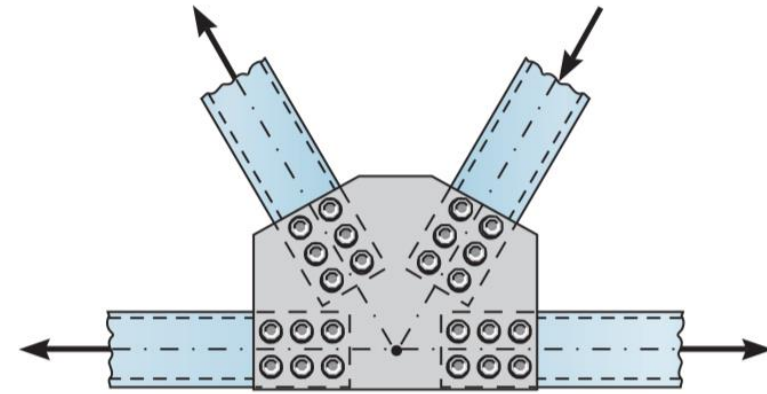
treliças compostas formadas a
partir da união de duas treliças
simples por meio de um nó
comum e uma barra



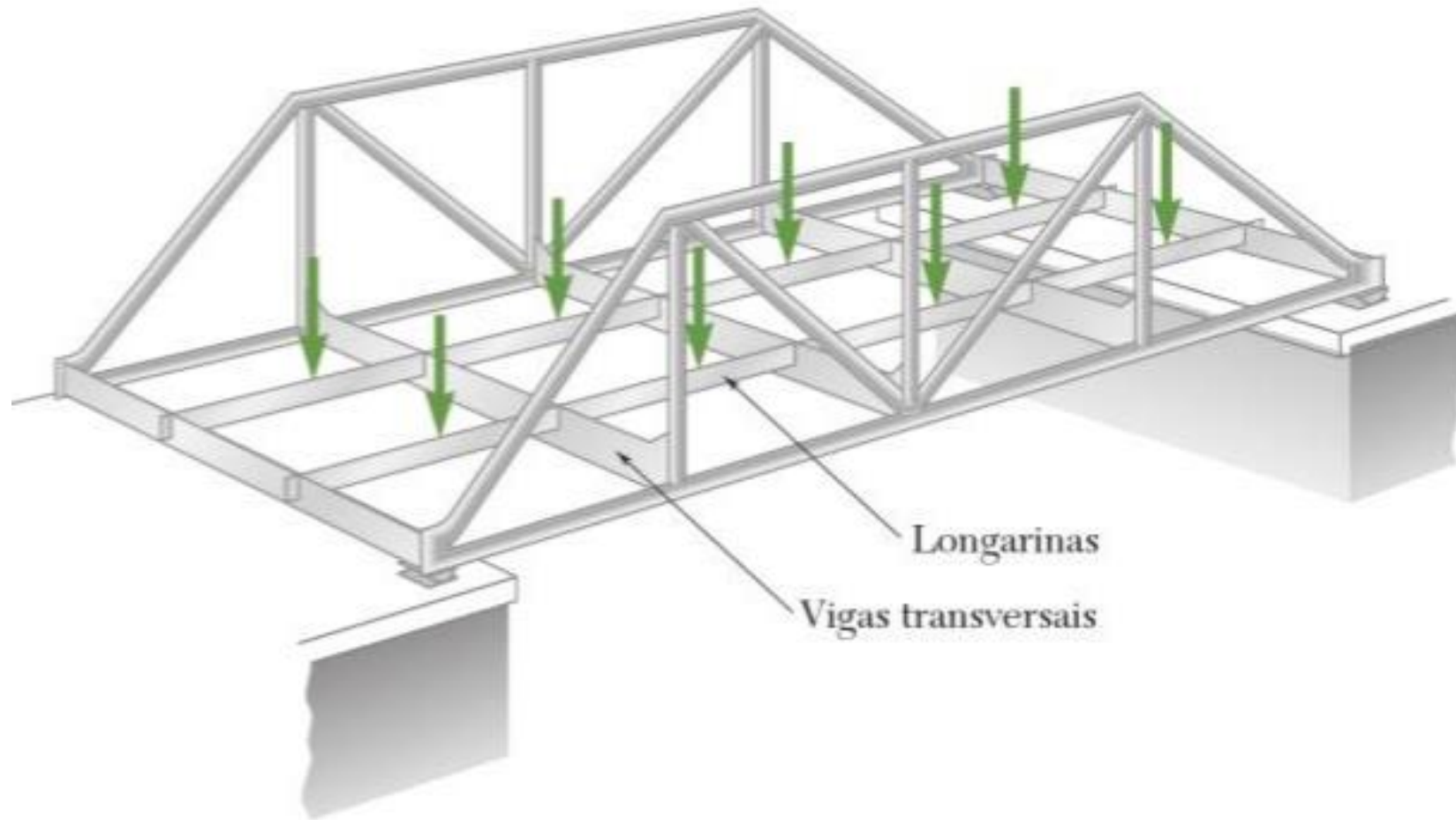
treliças compostas formadas a
partir da união de duas treliças
simples por meio de três barras

TRELIÇAS - LIGAÇÕES

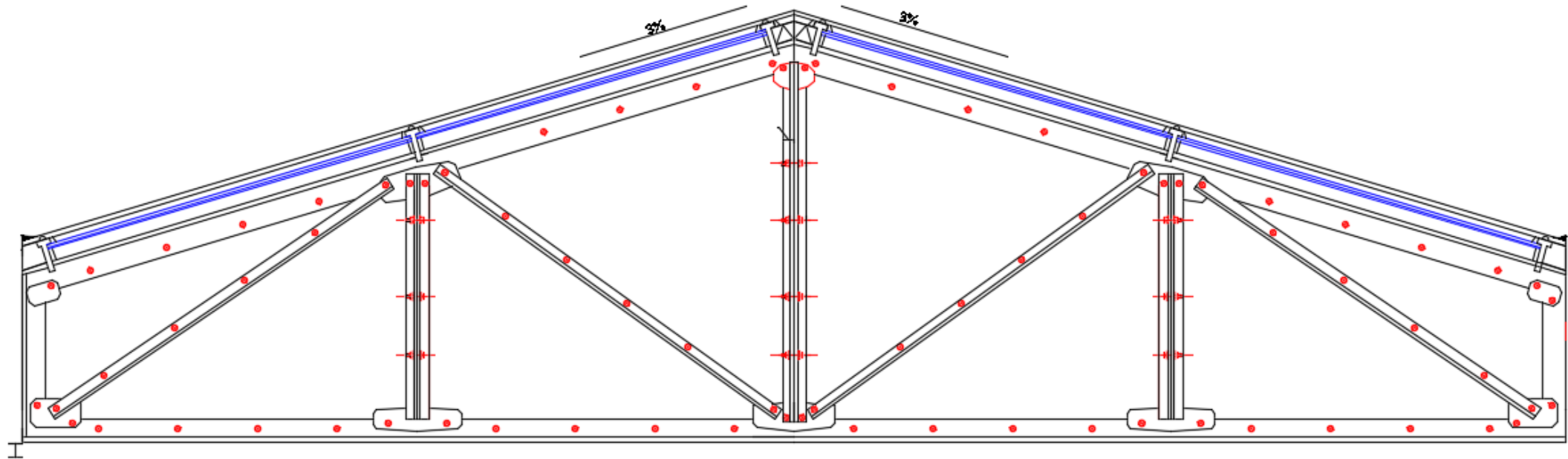
Ligações: nós



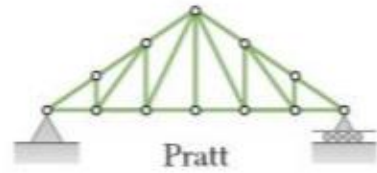
TRELIÇAS – SIMPLIFICA PARA 2D



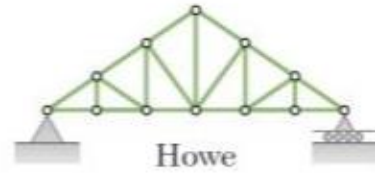
Telhas apóiam nas coberturas de treliça



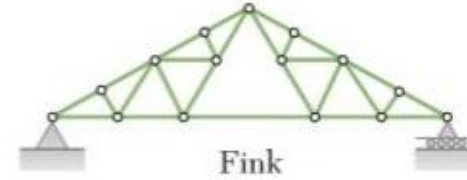
TRELIÇAS: TIPOS



Pratt

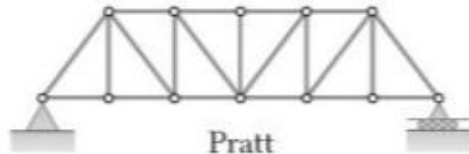


Howe

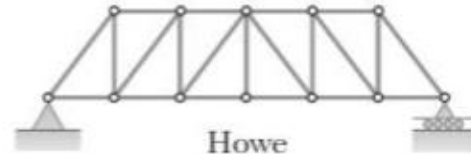


Fink

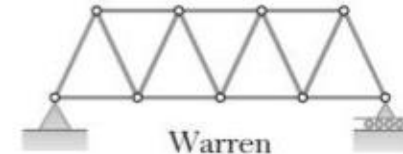
Treliças típicas para telhados



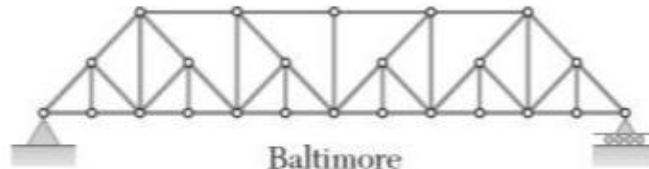
Pratt



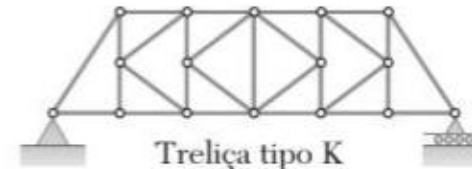
Howe



Warren

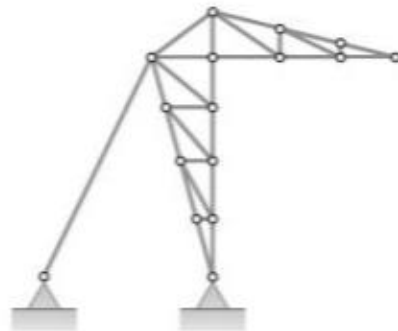


Baltimore

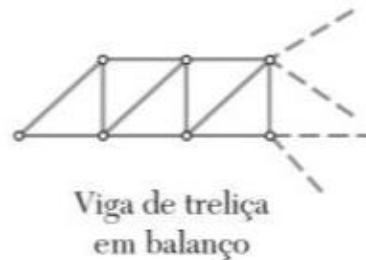


Treliça tipo K

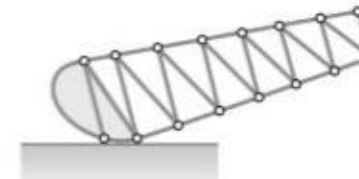
Treliças típicas para pontes



Tipo estádio



Viga de treliça em balanço



Basculante

Outros tipos de treliças

TRELIÇAS - HIPÓTESES

Hipóteses de cálculo: Treliza ideal

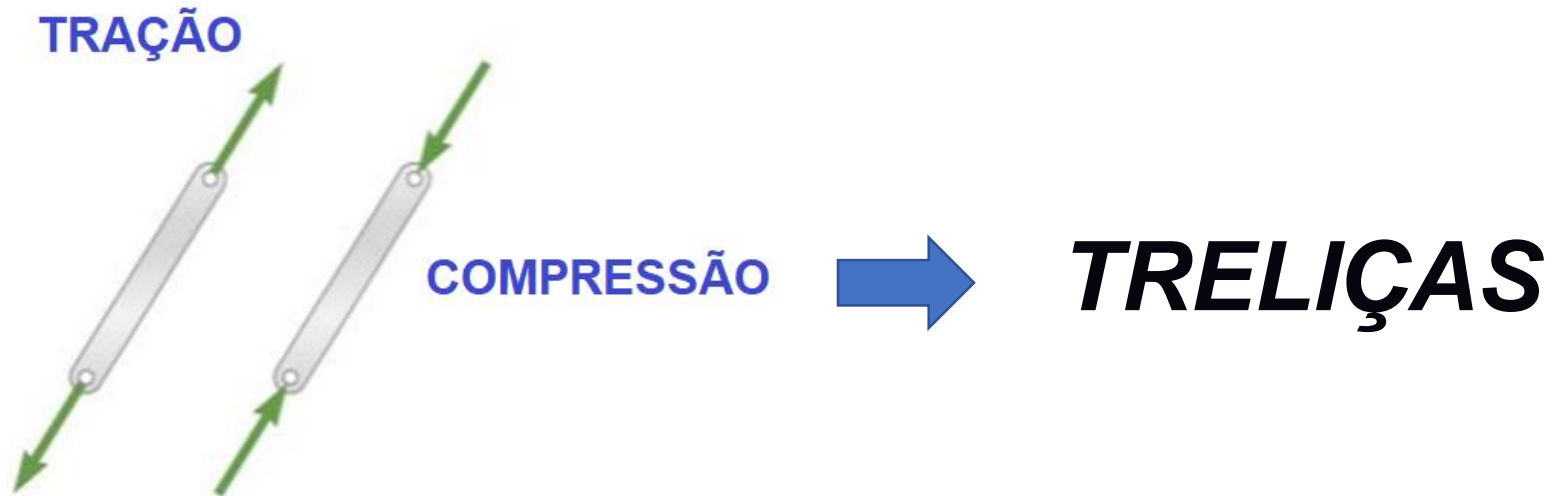
- 1) nós são ligações entre as barras e não se considera atrito;
- 2) estão sujeitas apenas as forças concentradas aplicadas somente nos nós;
- 3) os eixos das barras coincidem com a reta que une os centros das articulações, não gerando resultante de momento na articulação;
- 4) cada barra apresenta apenas esforços normais.

Os esforços de momento fletor e força cortante são nulos*

- 1) *Realmente é difícil de impedir que haja atrito nas ligações, mas estas têm valores bem pequenos, podendo ser desprezados na hipótese de treliça ideal.*
- 2) *Cada barra, por si, já possui peso próprio que é representado por um carregamento distribuído sobre a barra, portanto, carga fora do nó. Entretanto, essas cargas, de modo geral, possuem valores muito pequenos comparados com as forças concentradas nos nós. Forças estas que muitas vezes advém de outras estruturas, com das terças (vigas que sustentam as telhas), que se apóiam nas treliças pelos nós.*
- 3) *Há pequenos valores de momento nos nós, que resultam nas ligações, mas são pequenos e desprezados nesse modelo ideal.*

TRELIÇAS - ESFORÇOS

Barras com esforços apenas NORMAIS



TRELIÇAS - MATERIAL

Por ser peças moduladas sujeitas a tração e compressão, é comum usar:



Aço

Madeira

Pode haver de concreto, mas como este não resiste bem a tração não é comum, além de que o concreto deve ser executado de uma única vez, ao passo que as de madeira e aço são montadas.

TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

nr. barras = b

nr. reações = r

nr. nós = n

$b + r = 2.n$  isostático

$b + r > 2.n$  hiperestático

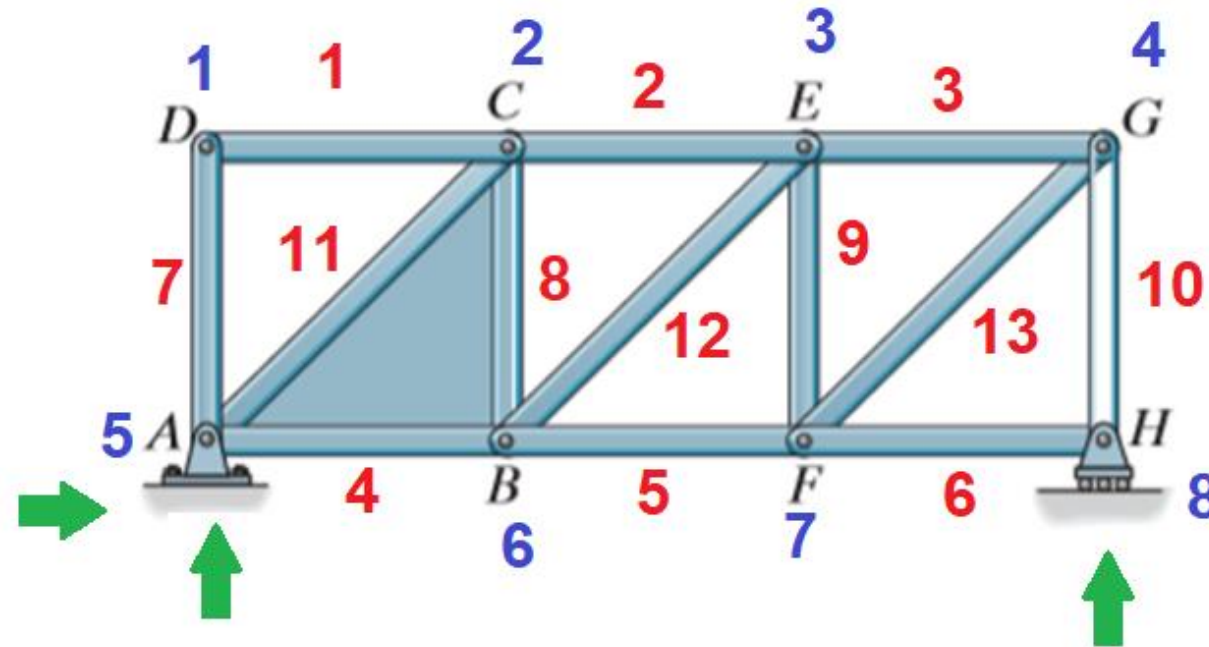
$b + r < 2.n$  hipoestático

TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

$$b + r = 2.n \quad \longrightarrow \quad \text{isostático}$$

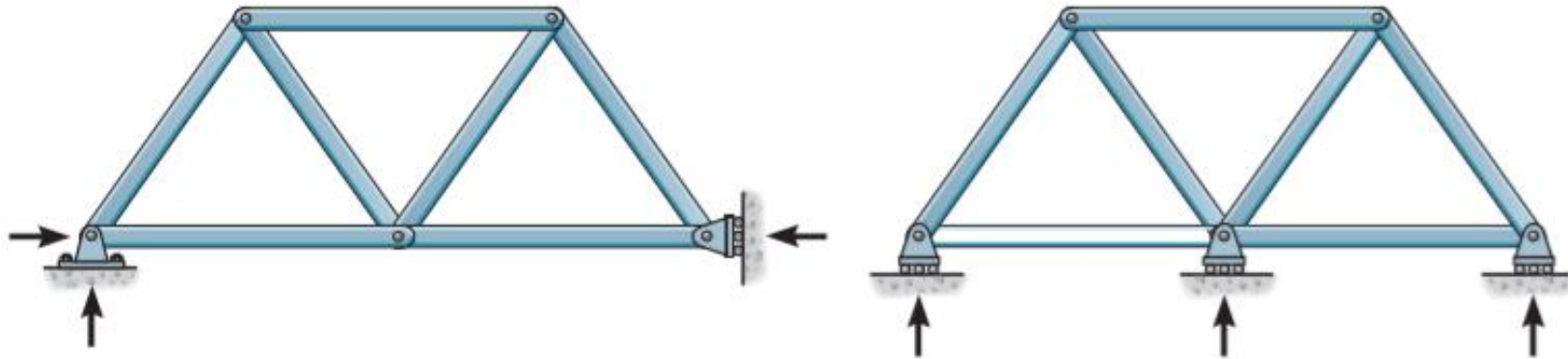
$$b = 13$$
$$r = 3$$
$$n = 8$$



TRELIÇAS

Determinação da Treliça:

$b + r < 2.n$ → hipoestático



Todas as reações não podem ser paralelas entre si

TRELIÇAS

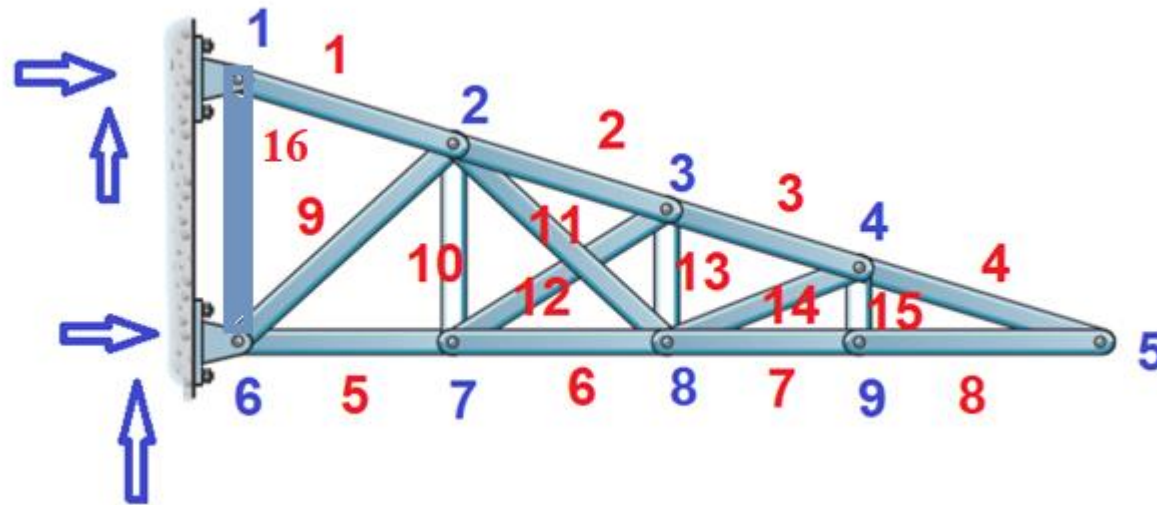
Determinação da Treliça:

$b + r > 2.n$ → hiperestático

$$b = 16$$

$$r = 4$$

$$n = 9$$



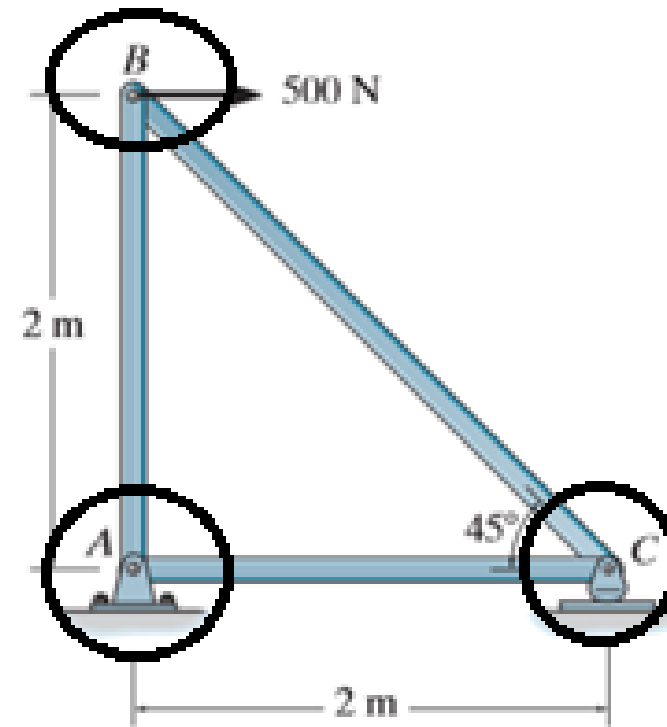
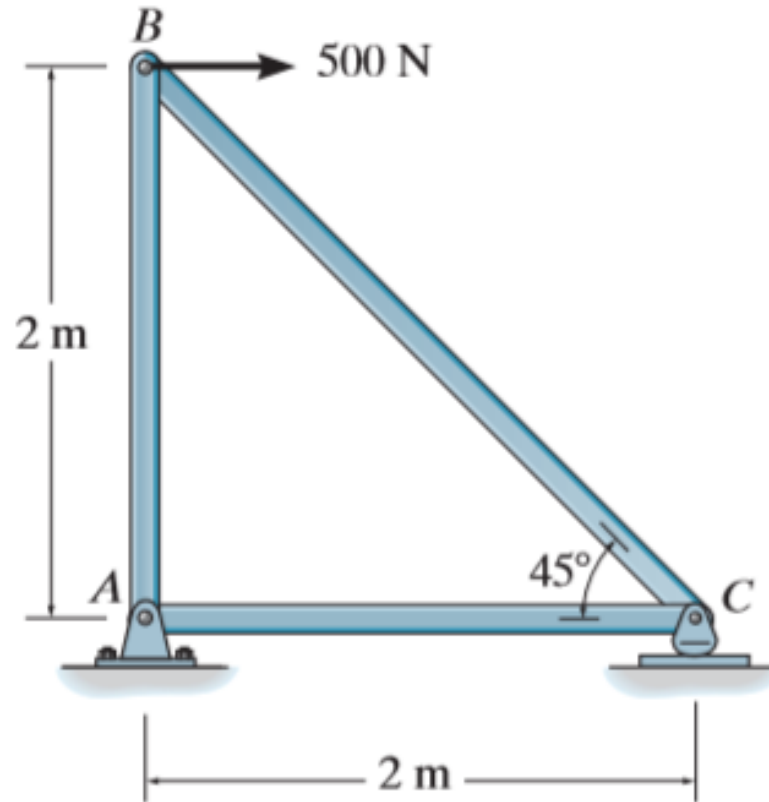
$$16 + 4 > 2.9$$

TRELIÇAS

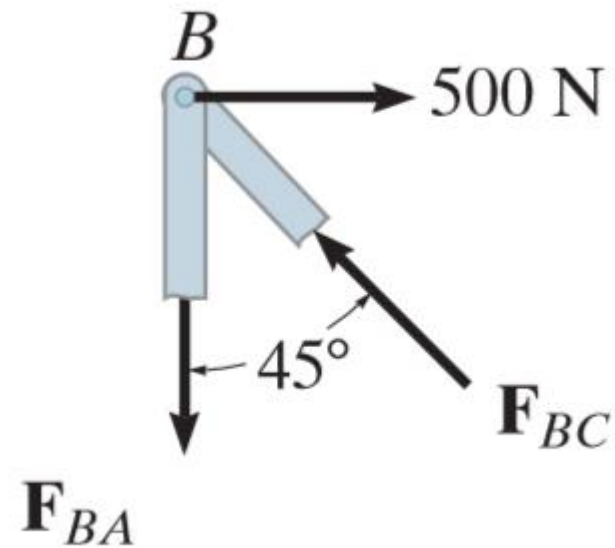
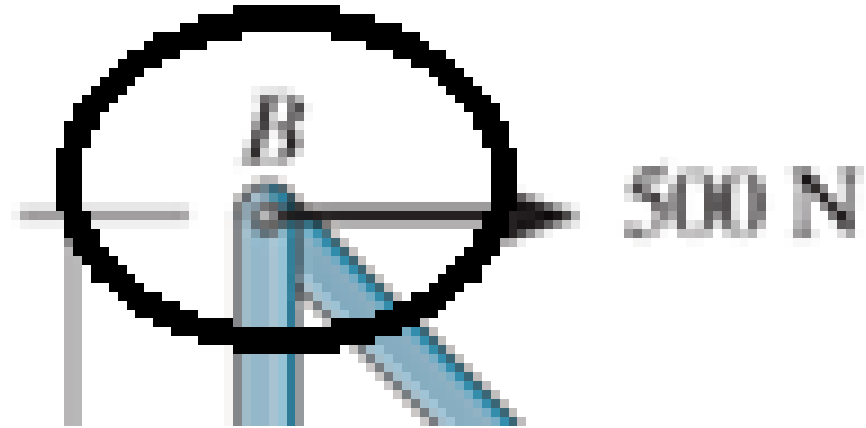
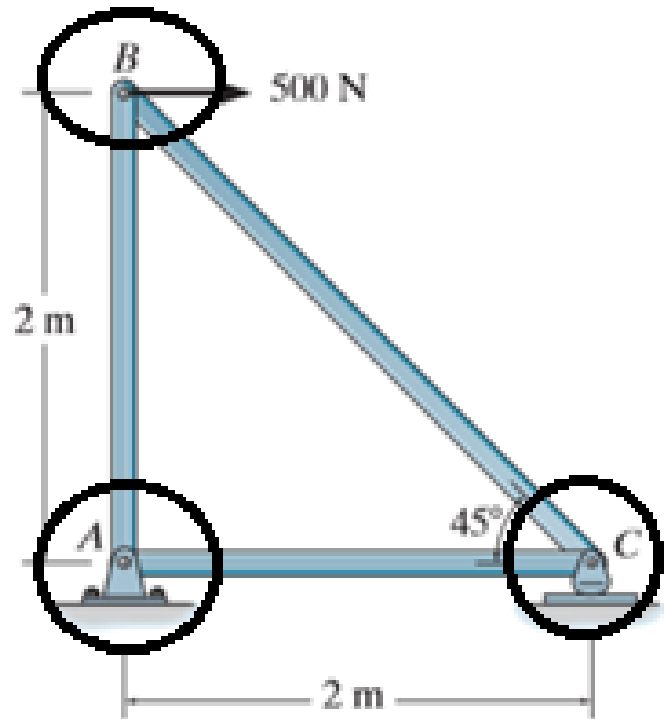
Métodos de cálculo manual

- **Método do equilíbrio dos nós**
- **Método de Ritter ou das seções**

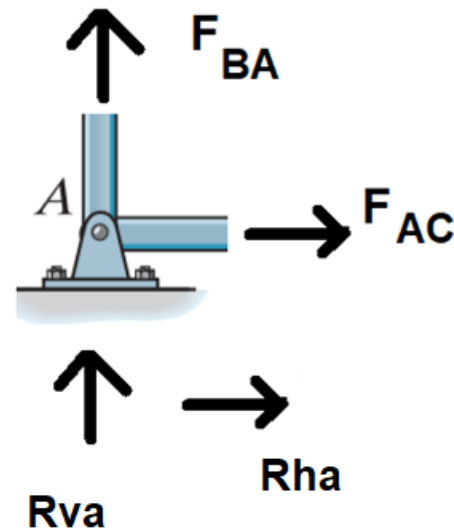
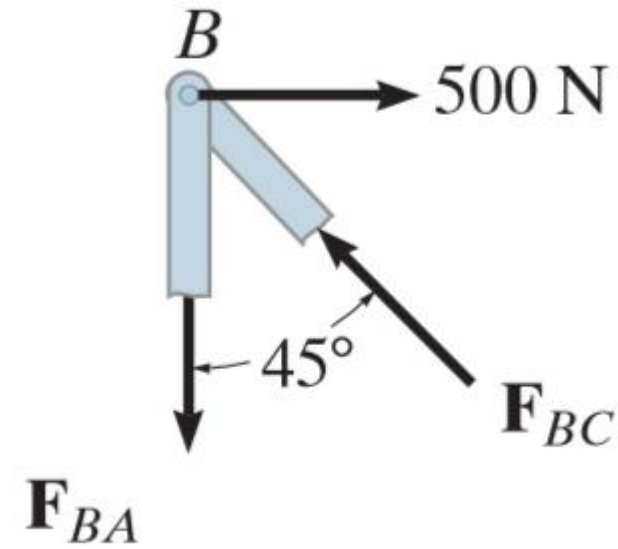
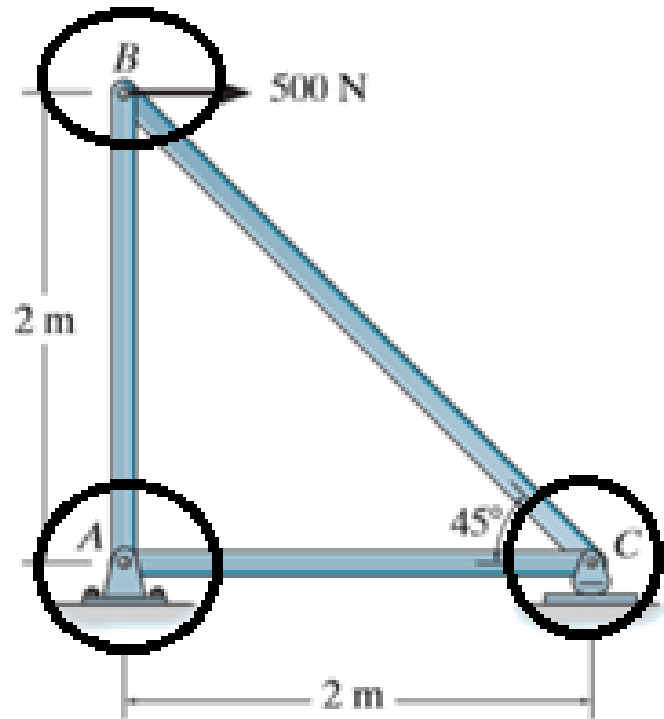
Treliças: método do equilíbrio dos nós



Treliças: método do equilíbrio dos nós



Treliças: método do equilíbrio dos nós



Treliças: método do equilíbrio dos nós

Em função das hipóteses admitidas, cada nó se constitui em um ponto material submetido a um sistema de forças de equilíbrio, onde se podem usar as seguintes equações para cada nó i :

$$\sum F_x^i = 0 \text{ e } \sum F_y^i = 0.$$

Assim, o procedimento de cálculo das forças normais de cada barra da treliça fica:

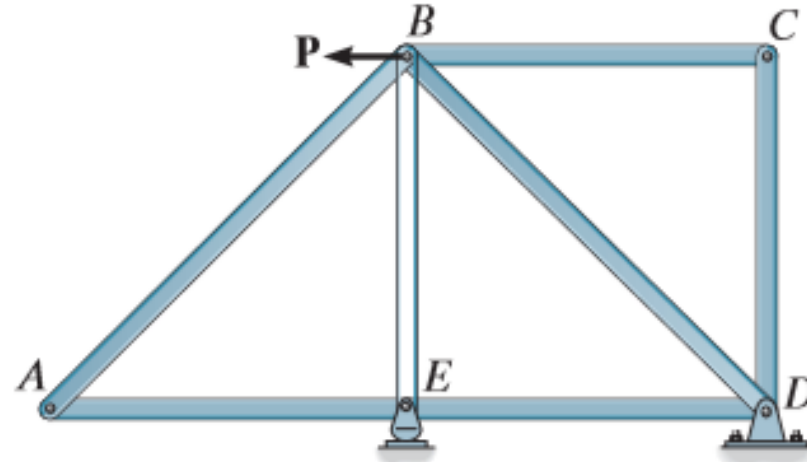
- 1) Determinar as reações ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_s = 0$);
- 2) Aplicar as duas equações de equilíbrio em cada nó.

Alguns casos, o nó está com mais de 2 barras conectadas

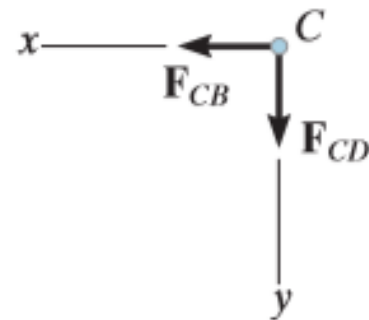
Resolver sistema linear

Barras nulas

Usadas para dar estabilidade a estrutura



(a)

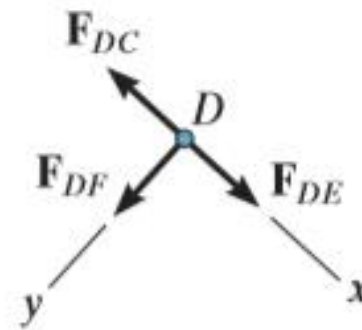
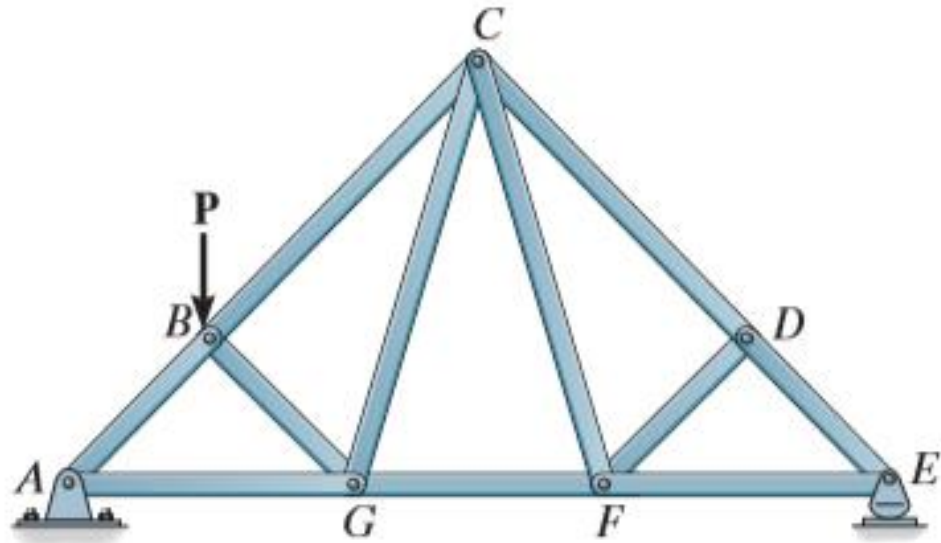


$$\leftarrow \sum F_x = 0; F_{CB} = 0$$

$$+\downarrow \sum F_y = 0; F_{CD} = 0$$

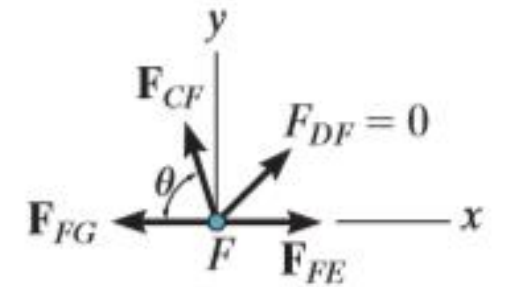
Barras nulas

Usadas para dar estabilidade a estrutura



(b)

$$+\curvearrowleft \Sigma F_y = 0; F_{DF} = 0$$



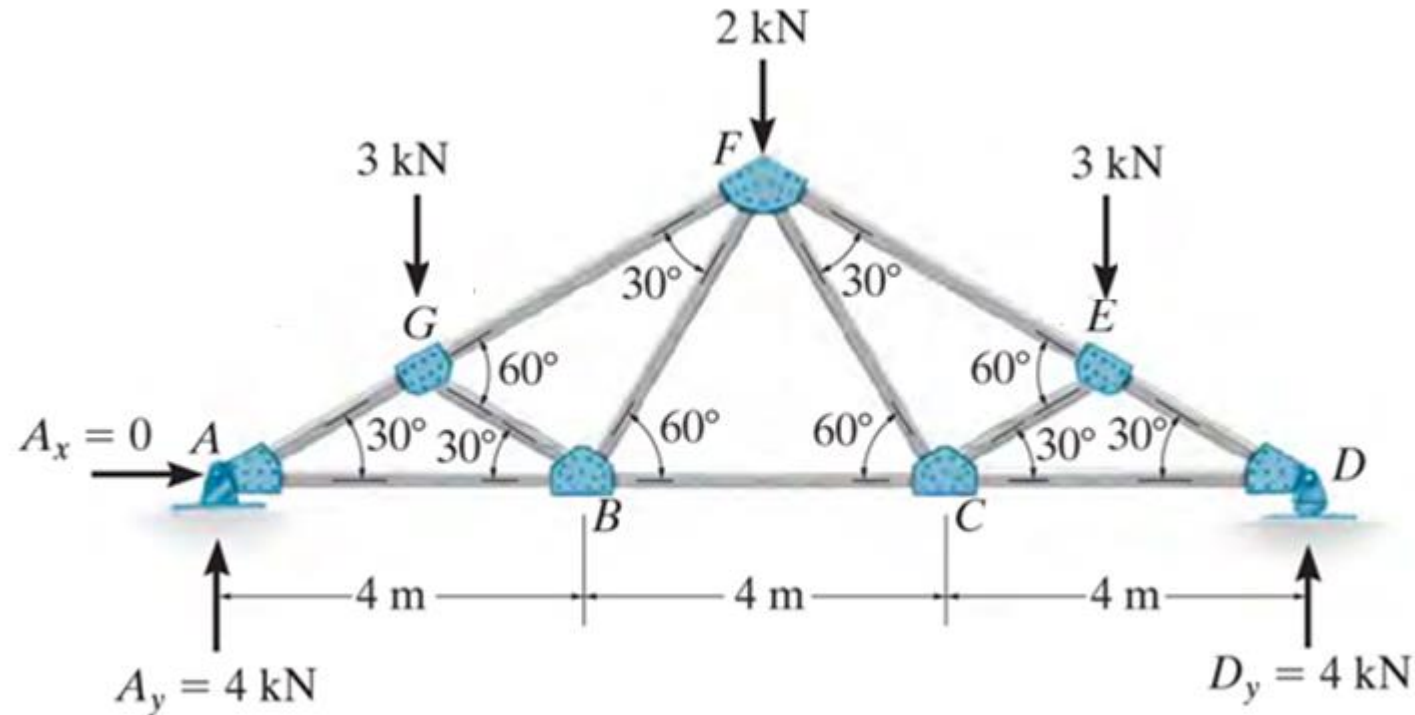
(c)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{CF} \sin \theta + 0 = 0$$

$$F_{CF} = 0 \text{ (since } \sin \theta \neq 0 \text{)}$$

Treliças: método do equilíbrio dos nós

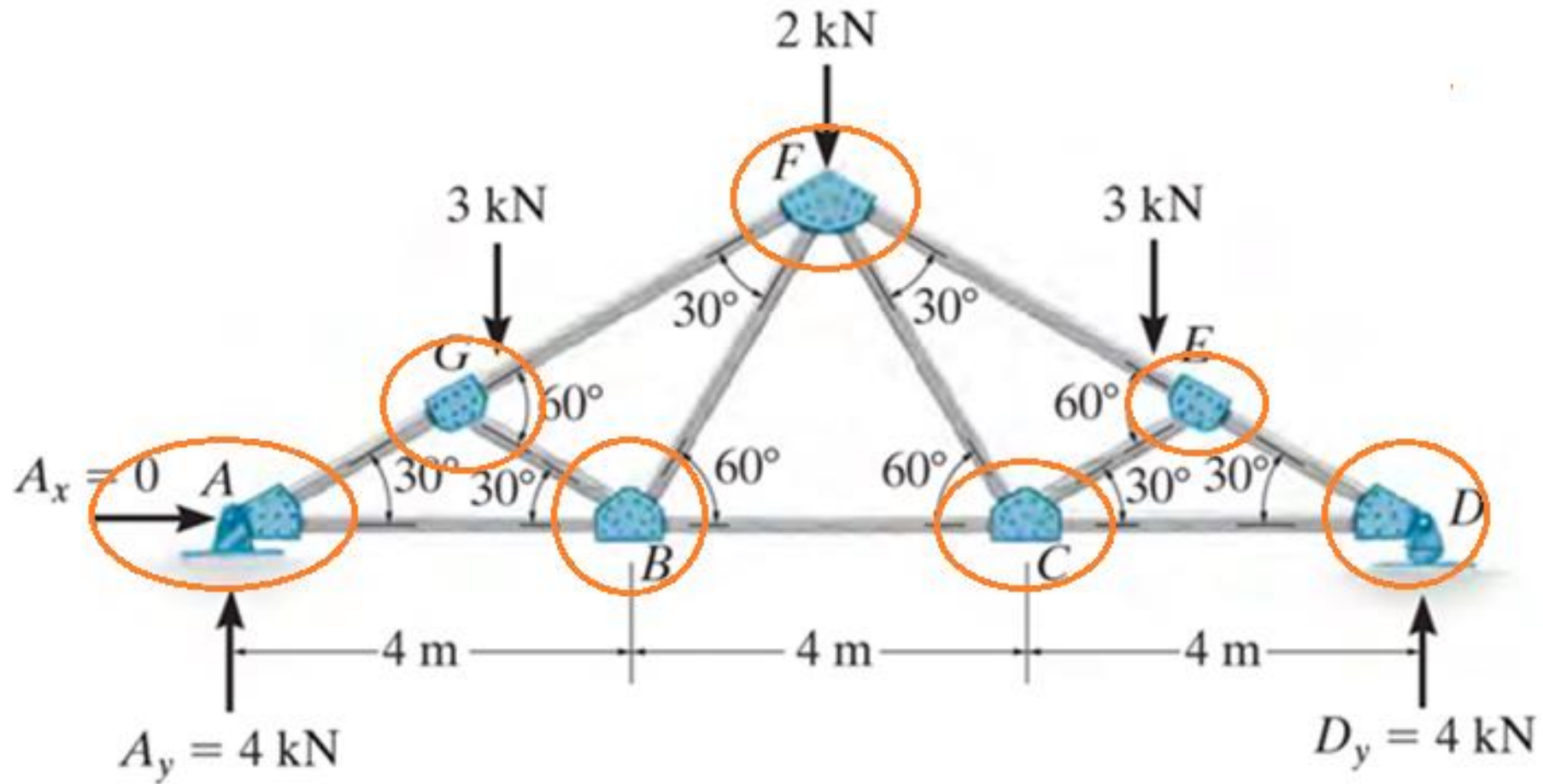
Alguns casos, o nó está com mais de 2 barras conectadas



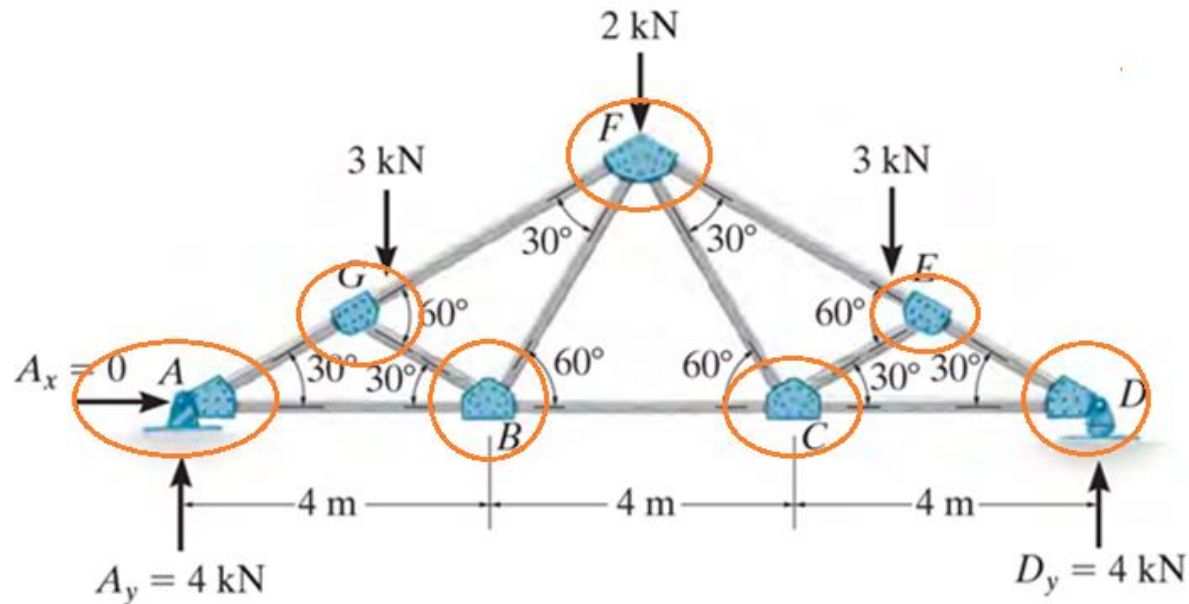
Obtenha reações

Comece por nós que se tem 2 incógnitas: $\sum F_x^i = 0$ e $\sum F_y^i = 0$.

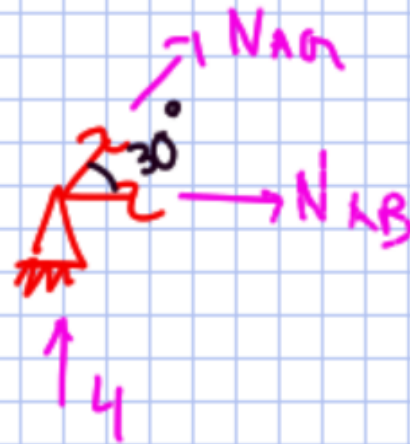
Treliças: método do equilíbrio dos nós



Treliças: método do equilíbrio dos nós



Nó A:



$$\sum F_y = 0 \quad N_{AG} \cdot \sin 30^\circ + 4 = 0$$

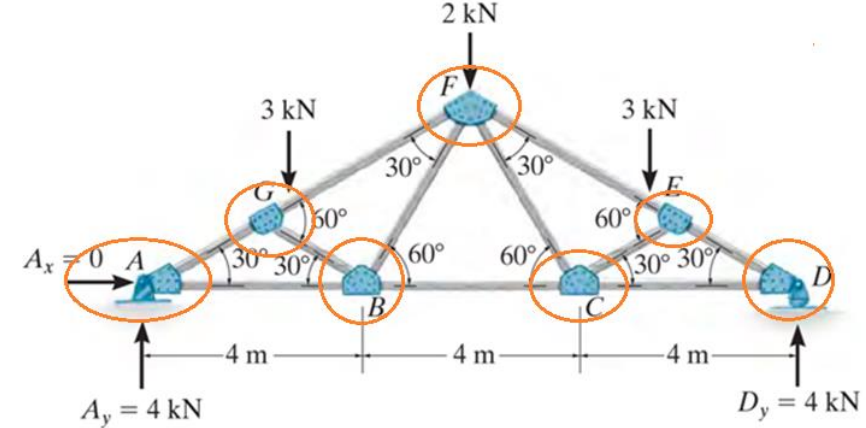
$$N_{AG} = -8 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

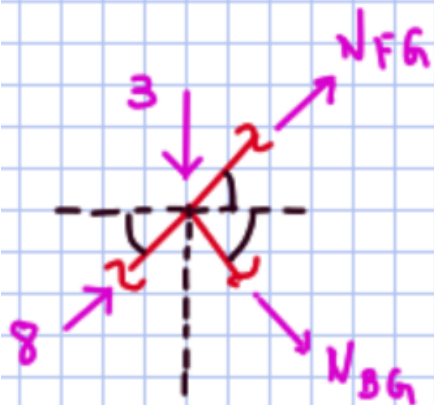
$$N_{AB} + N_{AG} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$N_{AB} = 6.93 \text{ kN}$$

Exemplo 1



Nó G:



$$\sum F_y = 0$$

$$N_{FG} \cdot \sin 30^\circ + 8 \sin 30^\circ = 3 + N_{BG} \cdot \cos 30^\circ$$

$$0,5 N_{FG} - 0,5 N_{BG} = -1 \quad (1) \quad (* 0,866)$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_{FG} \cdot \cos 30^\circ + N_{BG} \cdot \cos 30^\circ = -8 \cos 30^\circ$$

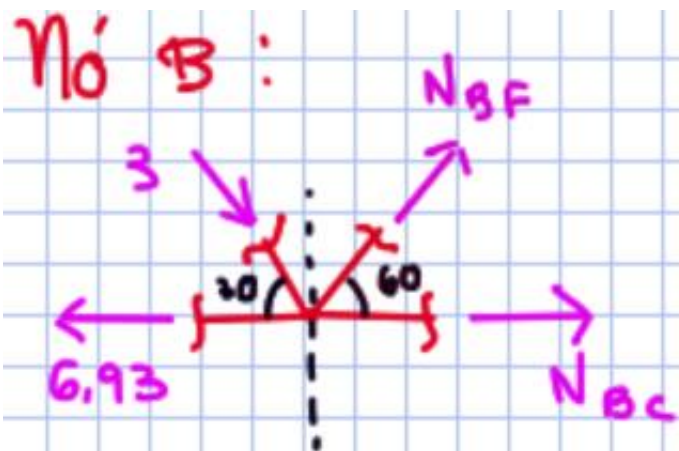
$$0,86 N_{FG} + 0,86 N_{BG} = -6,93 \quad (2) \quad (* 0,5)$$

Eq (1) < Eq. (2):

$$N_{FG} = -5 \text{ kN}$$

$$N_{BG} = -3 \text{ kN}$$

Exemplo 1



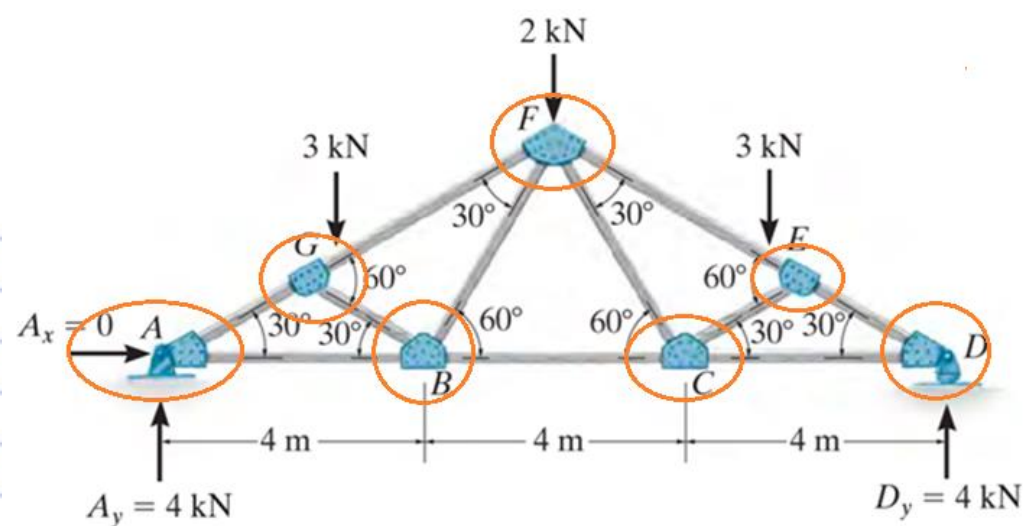
$$\sum F_y = 0: 3 \cdot \sin 30^\circ = N_{BF} \cdot \sin 60^\circ$$

$$N_{BF} = 1,73 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: N_{BC} + N_{BF} \cdot \cos 60^\circ + 3 \cdot \cos 30^\circ = 6,93$$

$$N_{BC} = 6,93 - 3 \cos 30^\circ - 1,73 \cos 60^\circ$$

$$N_{BC} = 3,46 \text{ kN}$$

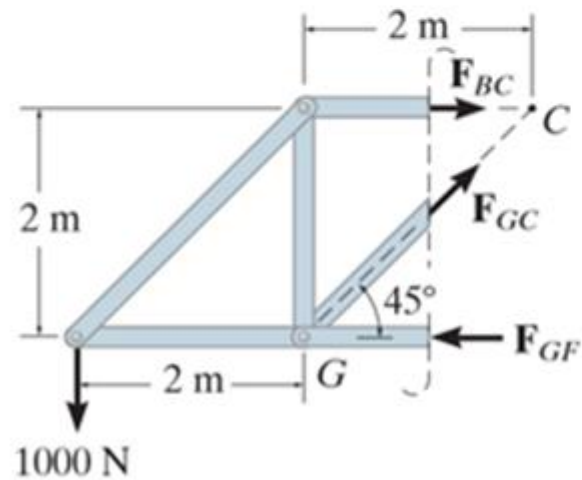
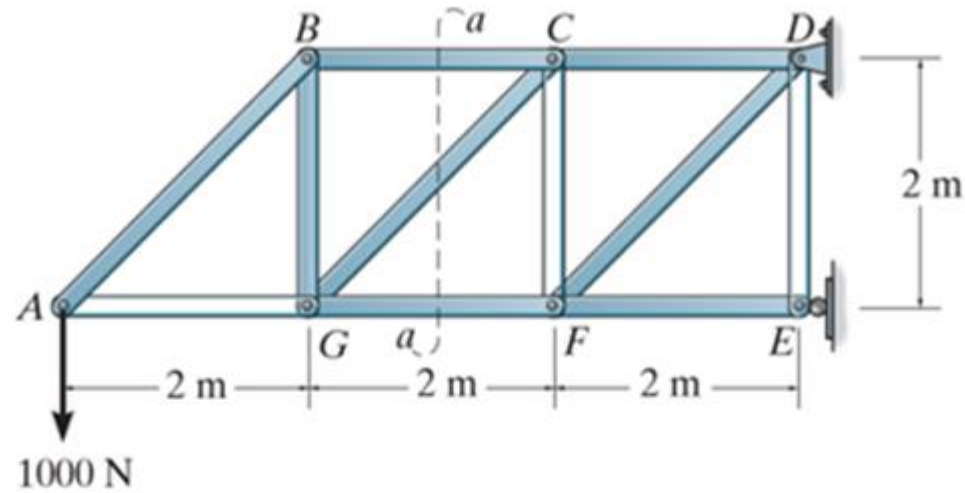


Treliças: Método de Ritter ou das seções

O método é mais empregado quando se queira determinar os esforços normais apenas em determinadas barras. Baseia-se pela aplicação de um corte numa seção imaginária que separe a treliça em duas partes. De modo que as três equações da estática possa ser aplicada no diagrama de corpo livre de cada uma das partes, levando a determinação dos esforços nas seções cortadas, quando possível.

- 1) Determinar as reações ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ e $\sum M_s = 0$);
- 2) Fazer um seletivo corte, passando pela(s) barra(s) desejada(s), separando a treliça em duas partes, aplicar as 3 equações da estática de equilíbrio na parte desejada, determinando os esforços na(s) barra(s) requerida(s).

Treliças: Método de Ritter ou das seções



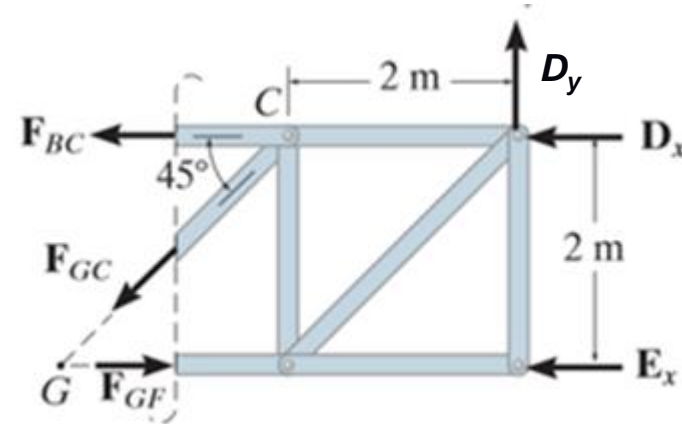
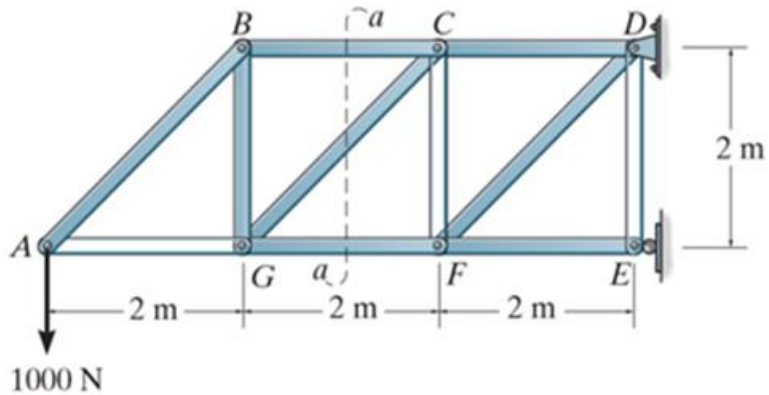
Usando

$$\sum M_C = 0$$

determina F_{GF}

**Usando $\sum F_y = 0$
determina F_{GC}**

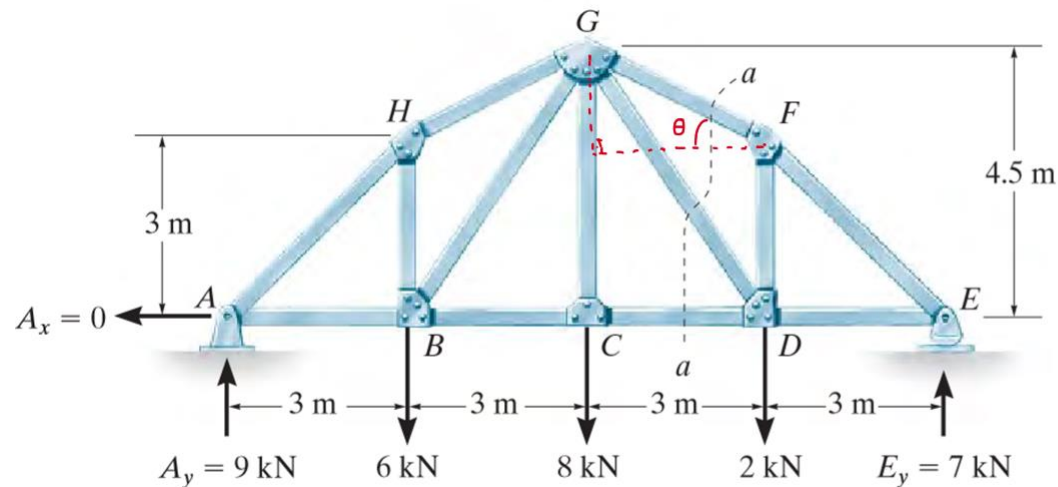
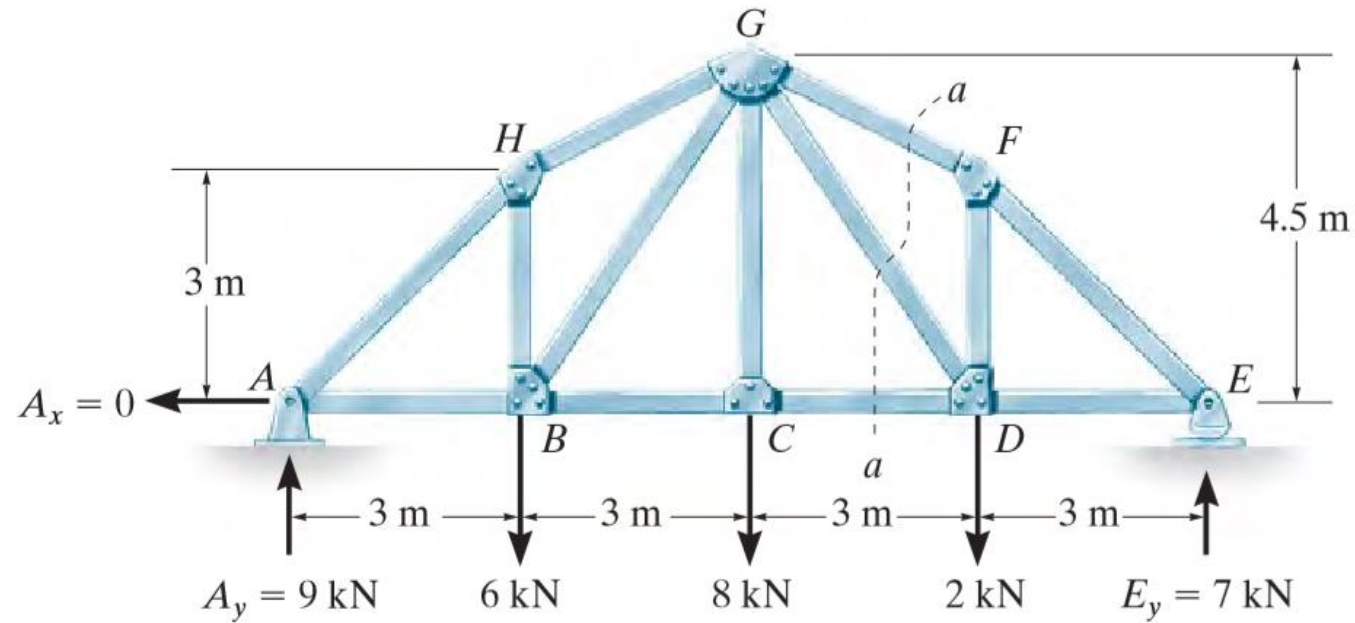
Treliças: Método de Ritter ou das seções



Usando $\sum M_G = 0$
determina F_{BC}

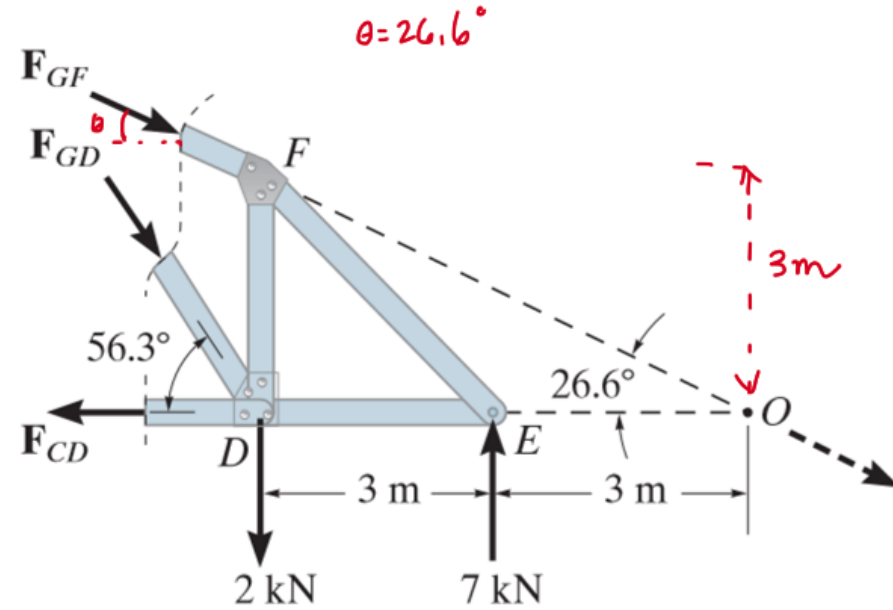
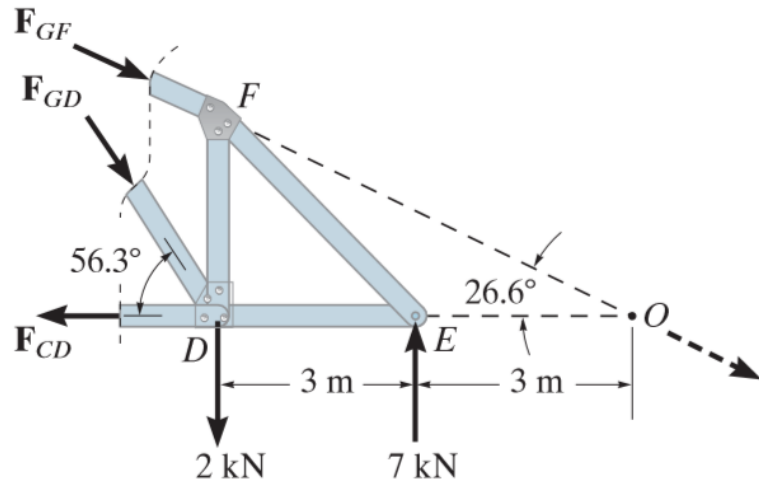
Usando $\sum F_y = 0$
determina F_{GC}

Exemplo 2: Obter N_{FG}



$$\theta = \arctg \left[\frac{(4,5-3)}{3} \right]$$
$$\theta = 26,56^\circ$$

Exemplo 2: Obter N_{FG}

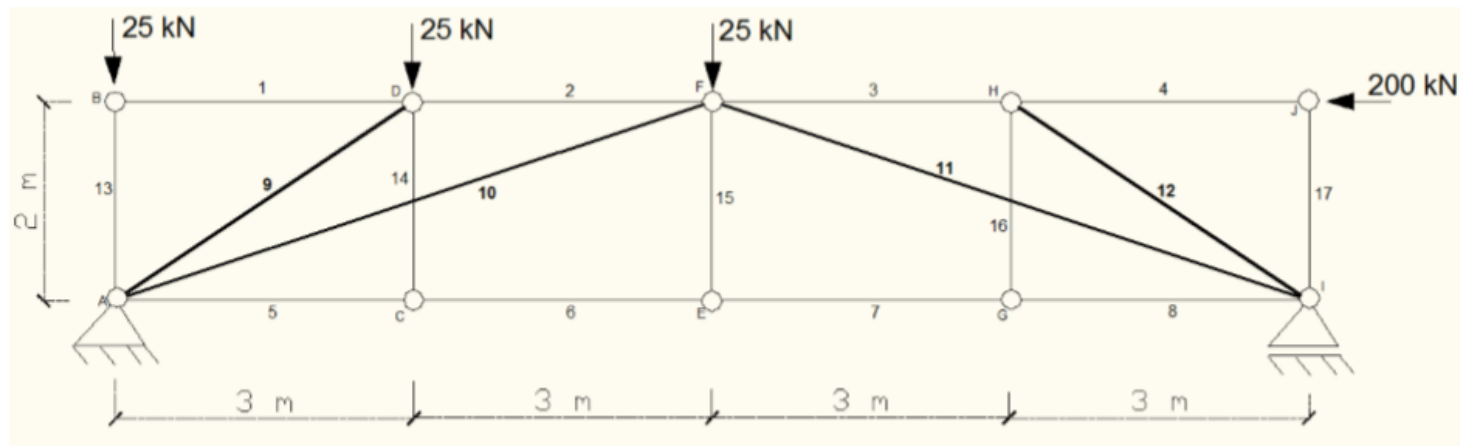


$$\sum M_D = 0 : 7 \cdot 3 = (F_{GF} \cdot \cos \theta) \cdot 3$$

$$F_{GF} = 7 / \cos 26.6^\circ = 7,83 \text{ kN (C)}$$

Exemplo 3

E50) Empregando necessariamente o processo do equilíbrio dos nós e/ou o processo de Ritter (ou das seções), determinar as forças normais nas barras 9, 10, 11 e 12 da treliça da figura, indicando claramente se essas forças são de tração ou de compressão. No final, escreva essas normais obtidas no espaço indicado.



Respostas:

$$N_9 = -45,1 \text{ kN (C)}$$

$$N_{10} = -125,17 \text{ kN (C)}$$

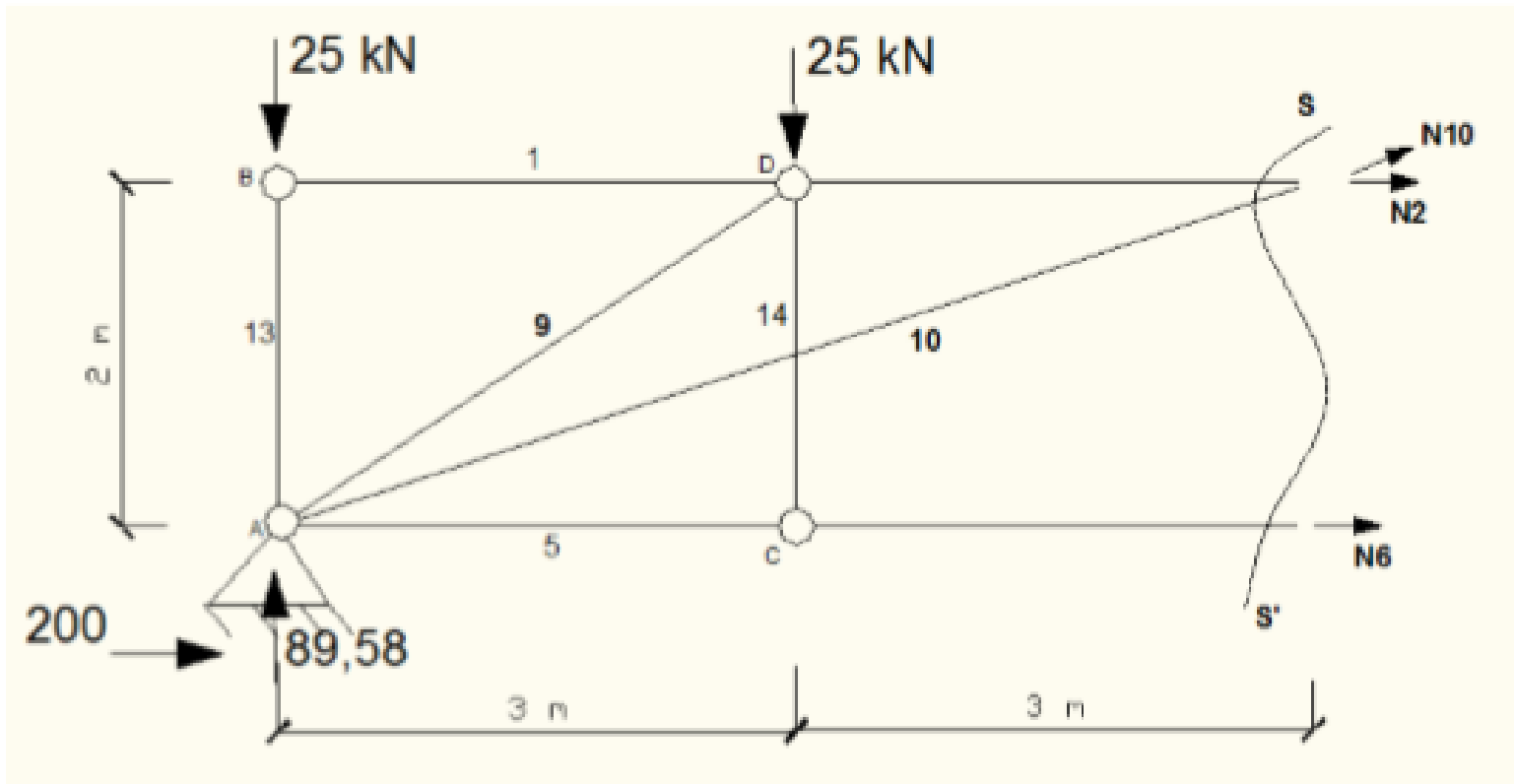
$$N_{11} = +46,1 \text{ kN (T)}$$

$$N_{12} = 0$$

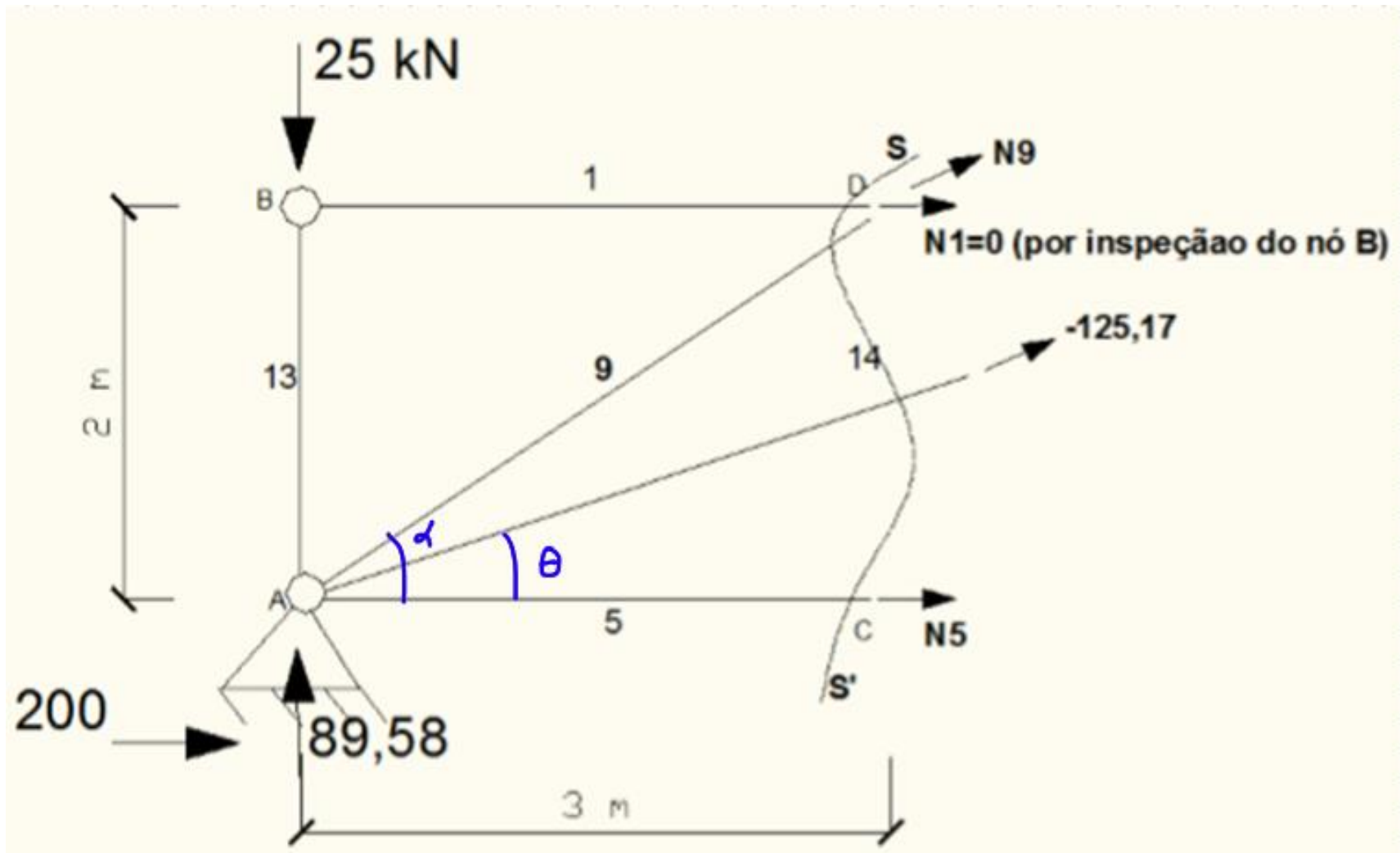
$$\sum M_A = 0: 12.R_b + 2 * 200 = 3.25 + 6 * 25 \rightarrow R_b = -14,58 \text{ kN} \downarrow$$

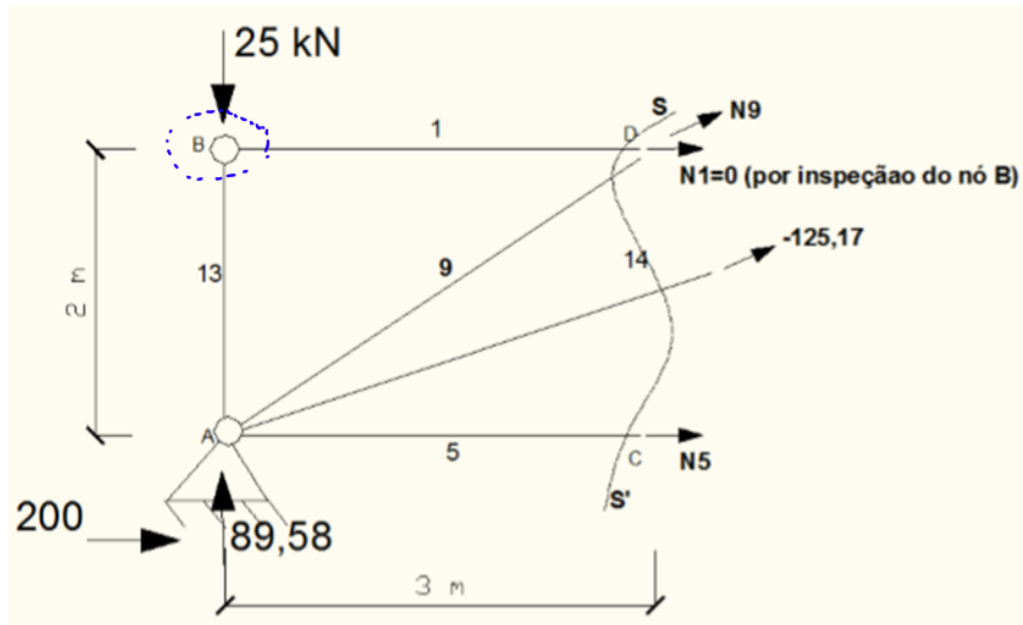
$$\sum F_y = 0: R_a - 14,58 = 75 \rightarrow R_a = 89,58 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum F_x = 0: R_{Ax} = 200 \text{ kN} \rightarrow$$

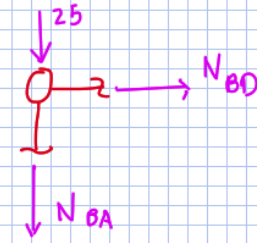


$$\sum F_y = 0: \quad N_{10} \cdot \sin\theta + 89,58 = 50 \rightarrow N_{10} = -125,17 \text{ kN (C)}$$

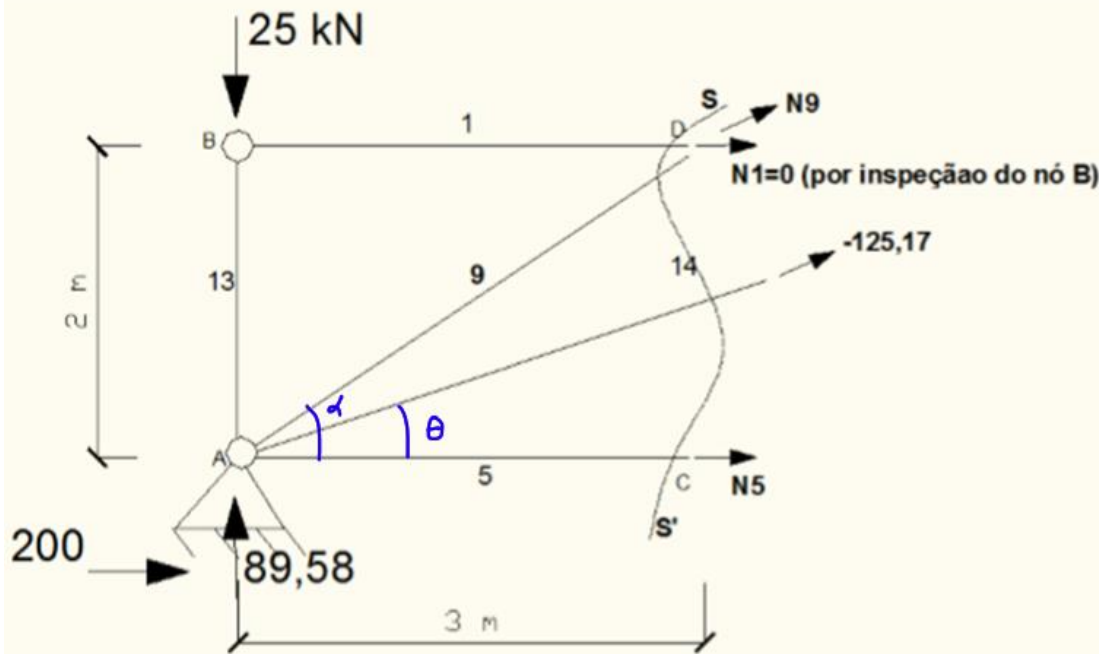




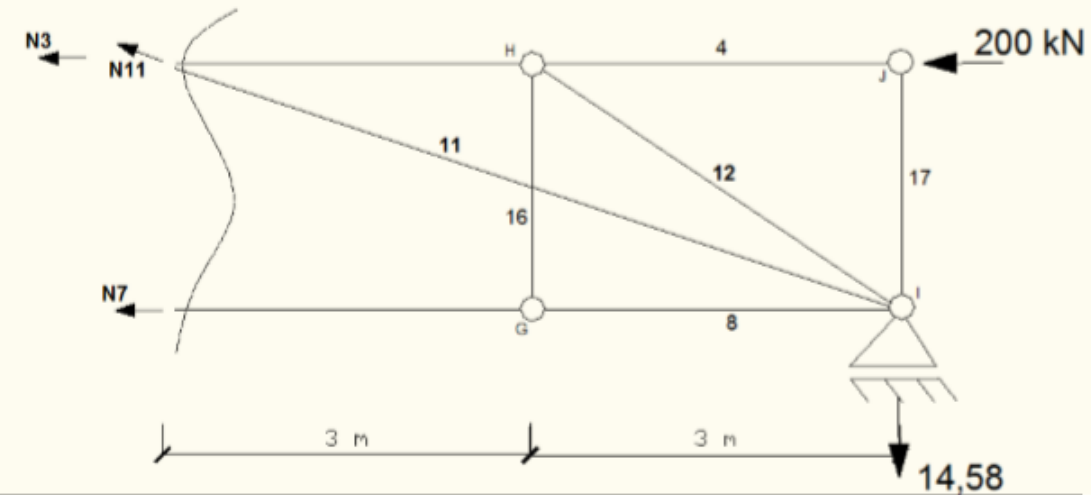
Nó B:



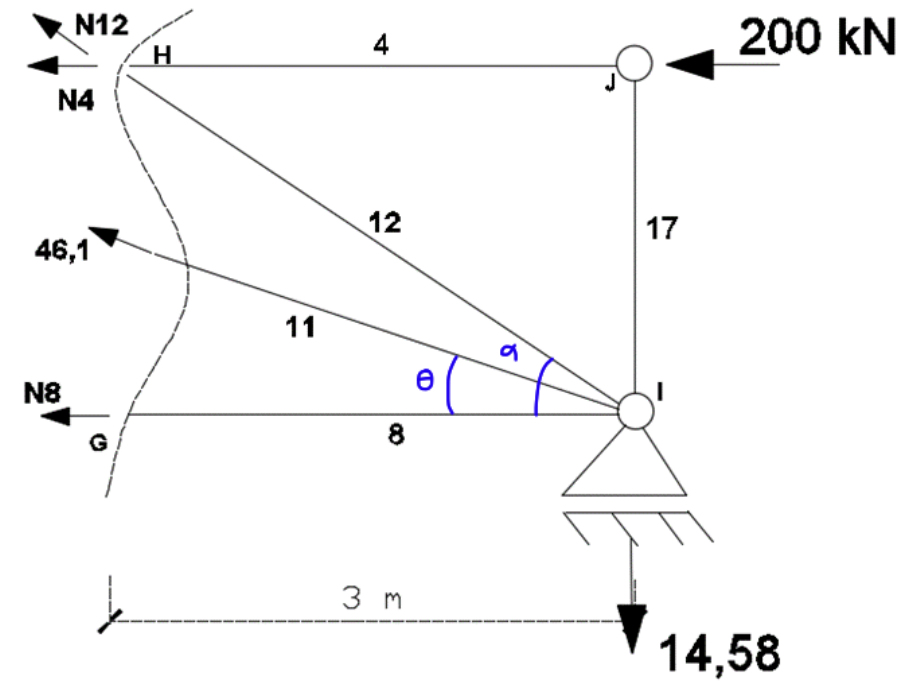
$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ N_{BD} &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ N_{DA} &= -25 \text{ kN} \end{aligned}$$



$$\sum M_c = 0: N_9 \cdot \cos \alpha \cdot 2 + 89,58 \cdot 3 = 125,17 \cdot \cos \theta \cdot 1 + 25 \cdot 3 \rightarrow N_9 = -45,1 \text{ kN (C)}$$



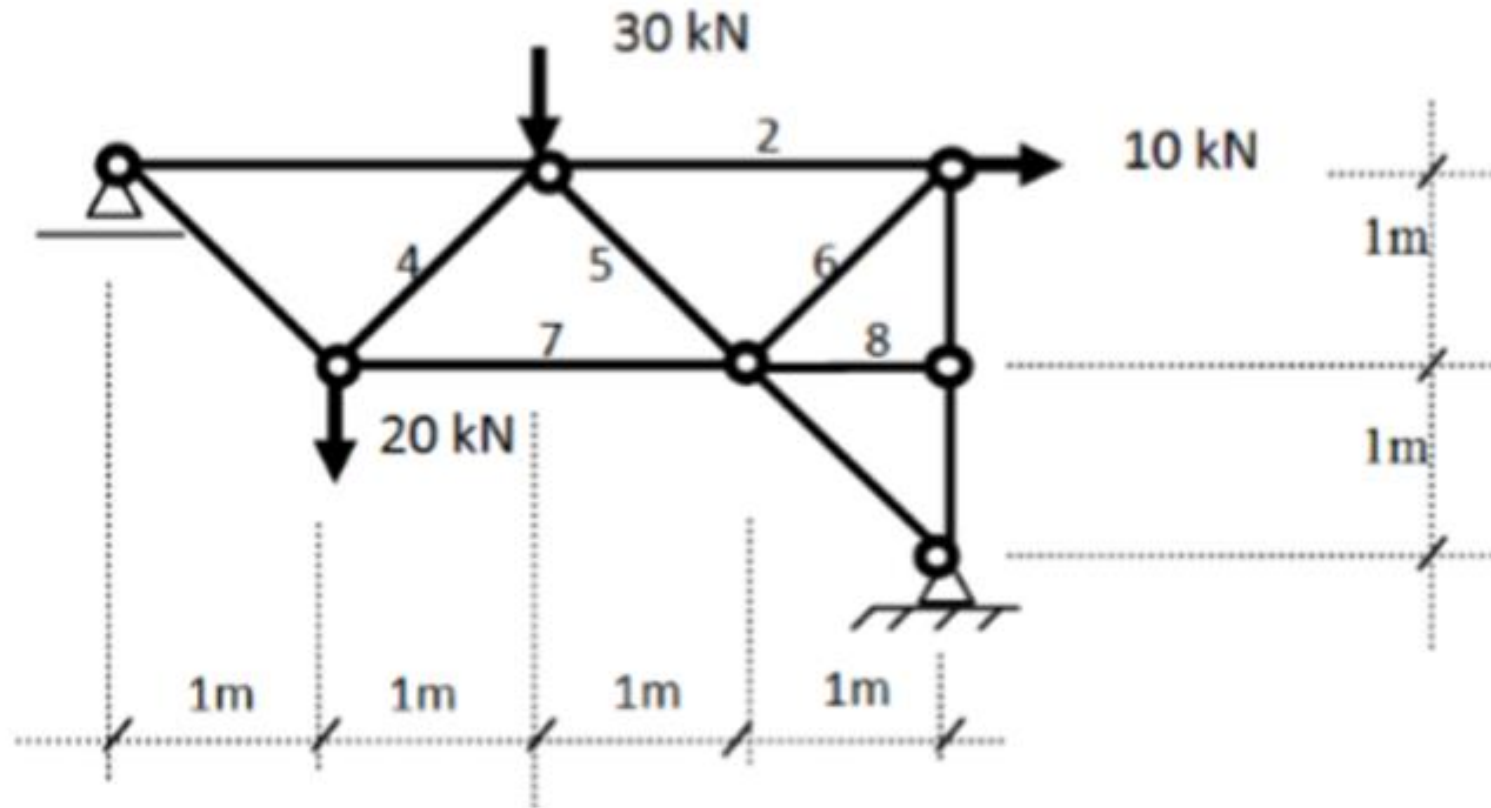
$$\sum F_y = 0: N_{11} \cdot \sin\theta = 14,58 \rightarrow N_{11} = 46,1 \text{ kN (T)}$$



$$\sum F_y = 0: N_{11} \cdot \sin\theta + N_{12} \cdot \sin\alpha = 14,58 \rightarrow N_{12} = 0$$

Exemplo 4

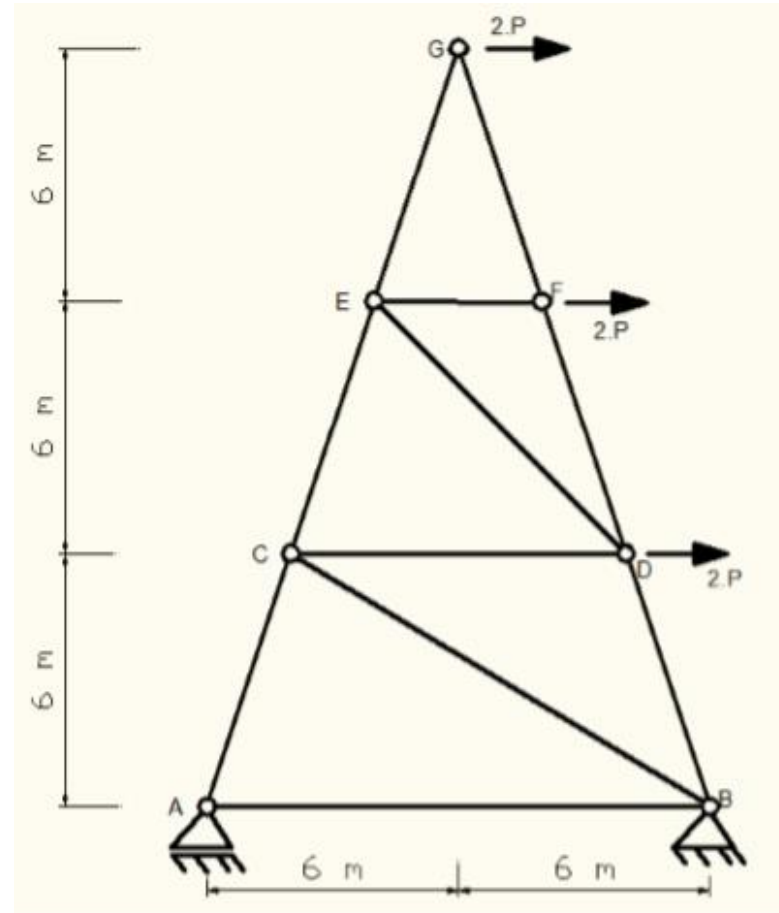
Determinar as reações nos apoios e os esforços normais nas barras 2, 4, 5, 6, 7 e 8 da treliça plana da figura, aplicando o processo de Ritter pelo menos uma vez.



Desafio 1

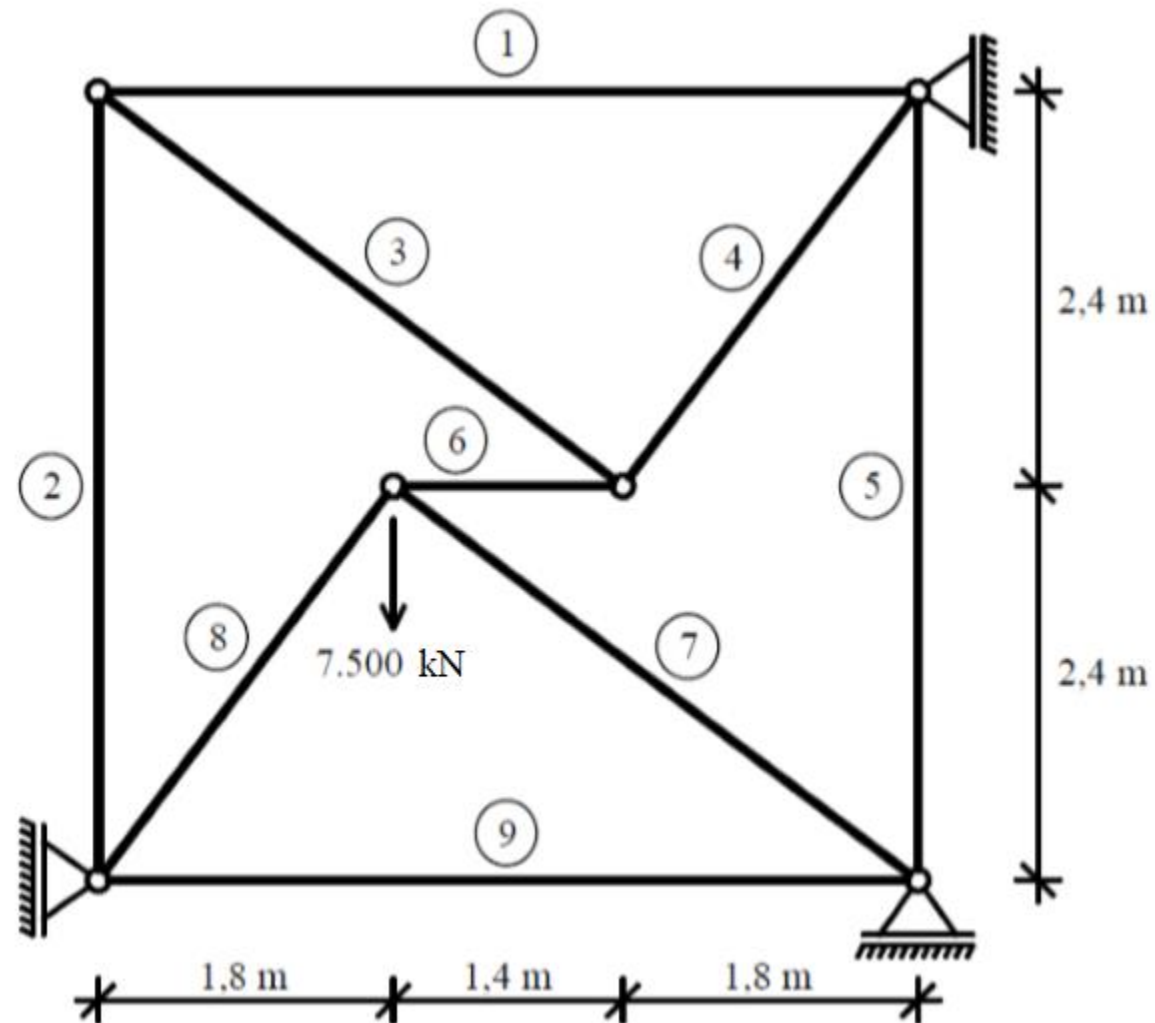
a) Determinar os esforços em todas as barras da treliça a seguir, em função de P . Indicar seus valores no desenho à direita.

b) Com base nos valores do item a) e sabendo-se que as barras são de mesmo material e área, e que resistem, no máximo, a forças normais de 96 kN à tração e 60 kN à compressão, obtenha o máximo valor de P que possa ser aplicado (P_{max}), para que nenhuma barra tenha valores maiores que os limites indicados.

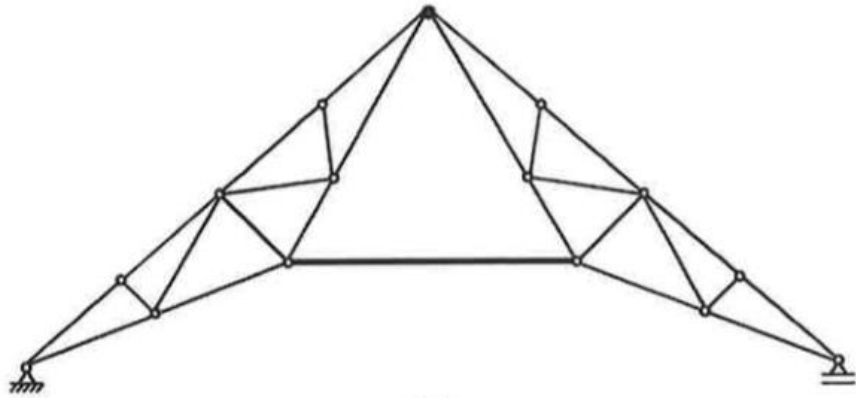


Desafio 2

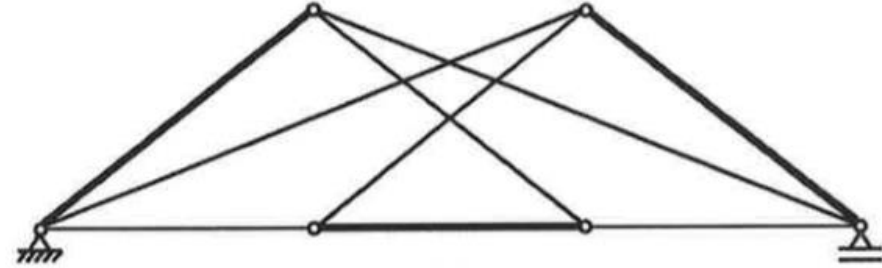
Obtenha todos os esforços da treliça.



TRELIÇA COMPOSTA



(a)



(b)

Da mesma forma que as treliças simples, as treliças compostas serão sempre isostáticas se os seus apoios forem os suficientes para impedir os movimentos de corpo rígido da estrutura; é o que ocorre com as duas treliças compostas da Figura

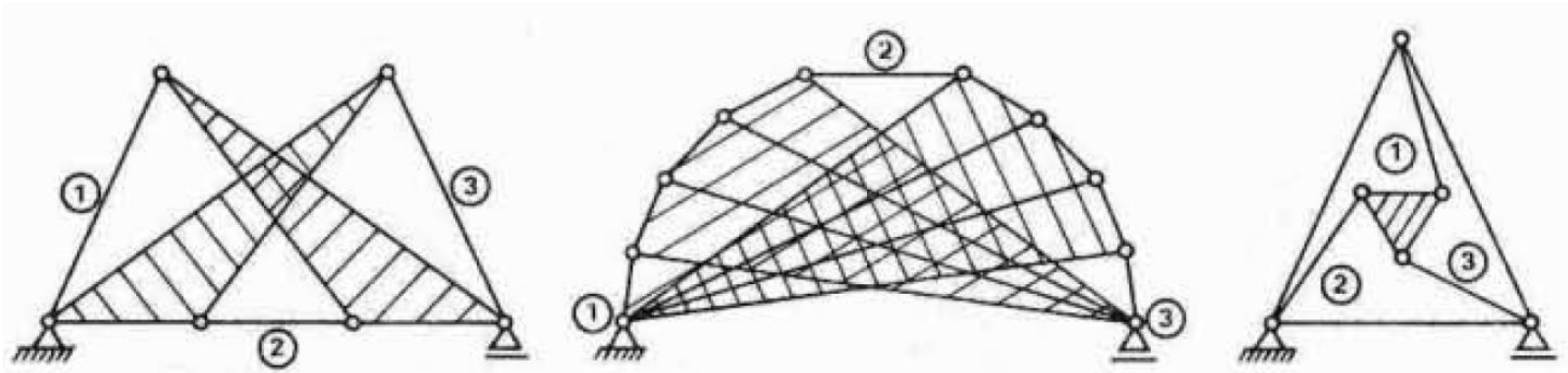
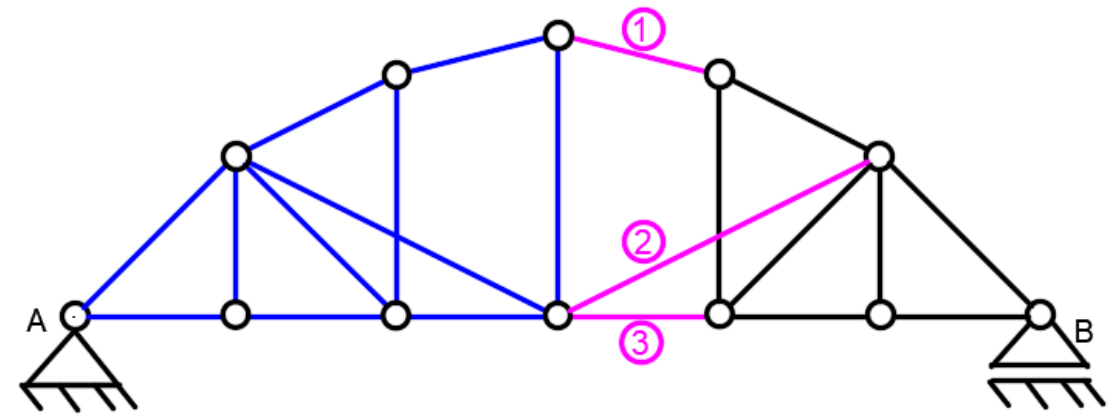
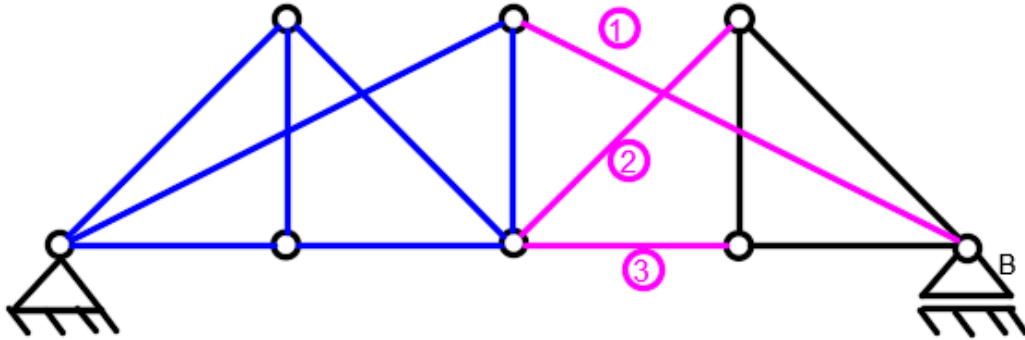
7.5 Processos de resolução das treliças compostas

Embora o processo do equilíbrio dos nós possa ser empregado para resolver as treliças compostas, a forma mais eficiente de resolvê-las é mediante o emprego do processo do equilíbrio dos nós combinado com o processo de Ritter. Estas duas formas de resolver as treliças compostas serão discutidas a seguir.

TRELIÇA COMPOSTA

Treliça composta isostática obtidas pela ligação de treliças simples:

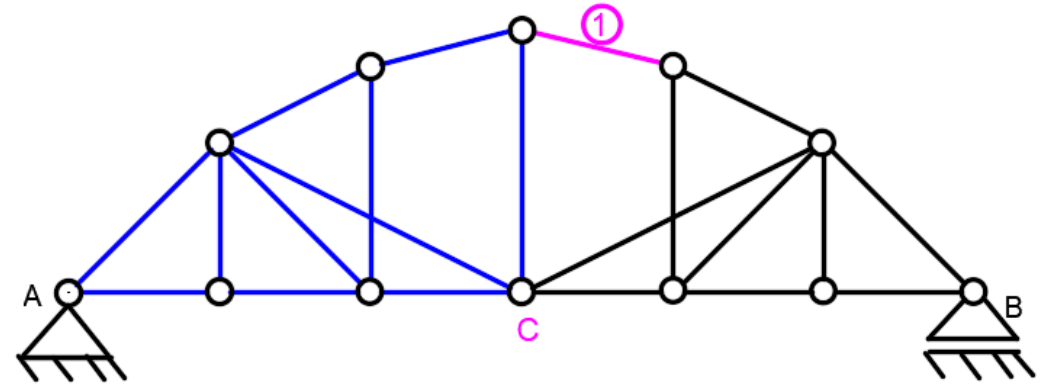
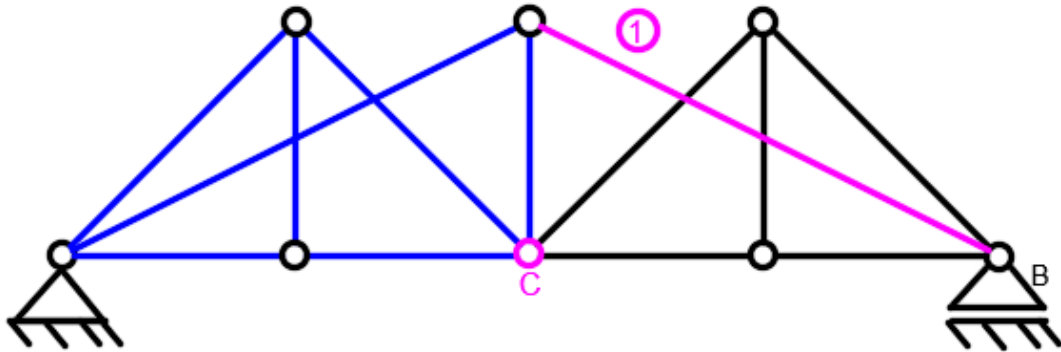
a) 3 barras não paralelas nem concorrentes no mesmo ponto;



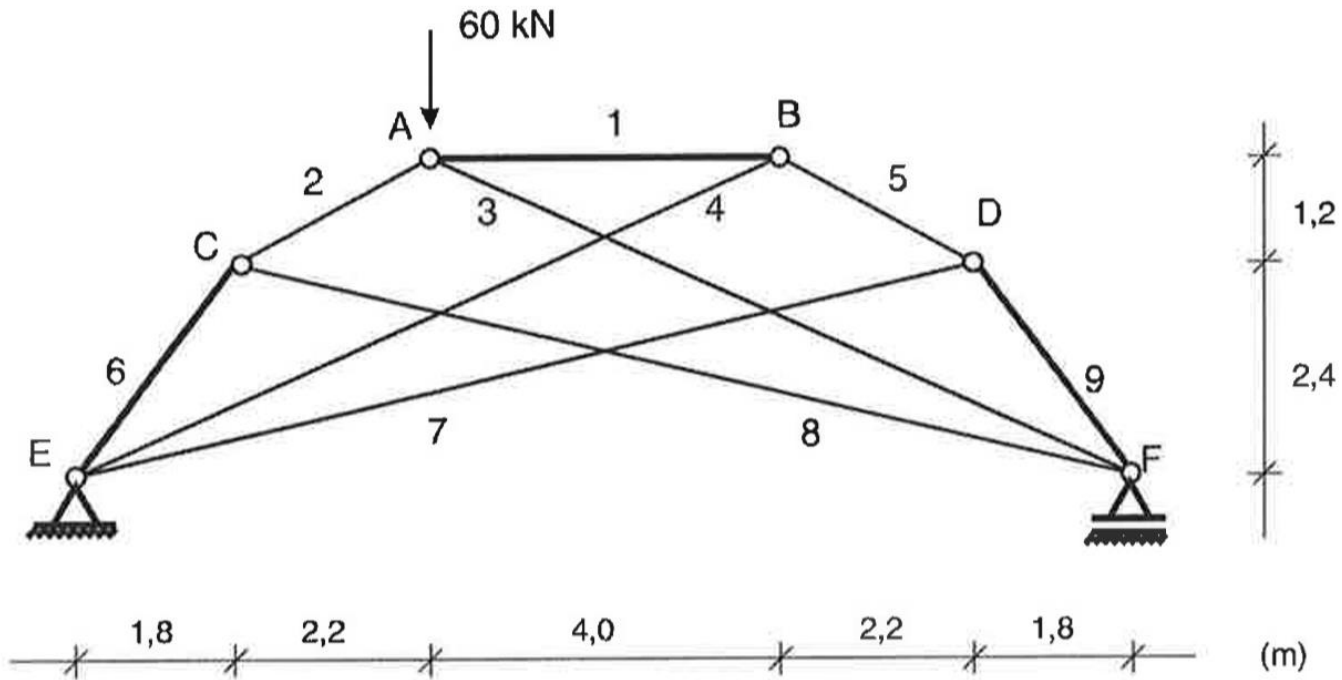
TRELIÇA COMPOSTA

Treliça composta isostática obtidas pela ligação de treliças simples:

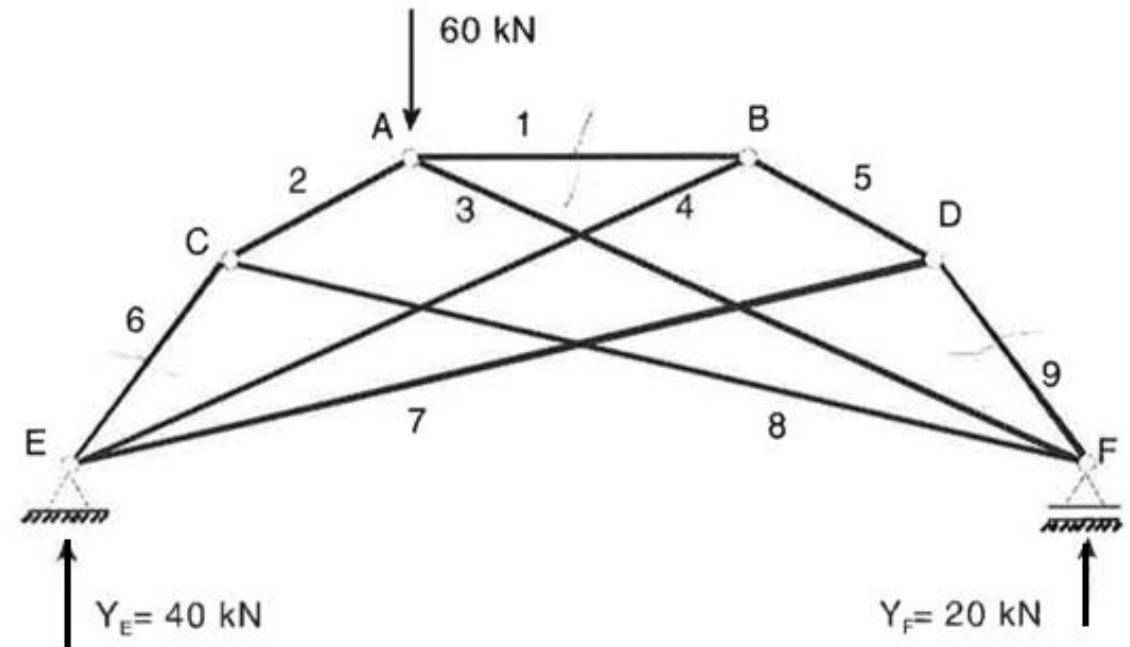
b) ou por 1 nó e uma barra não concorrente com este nó



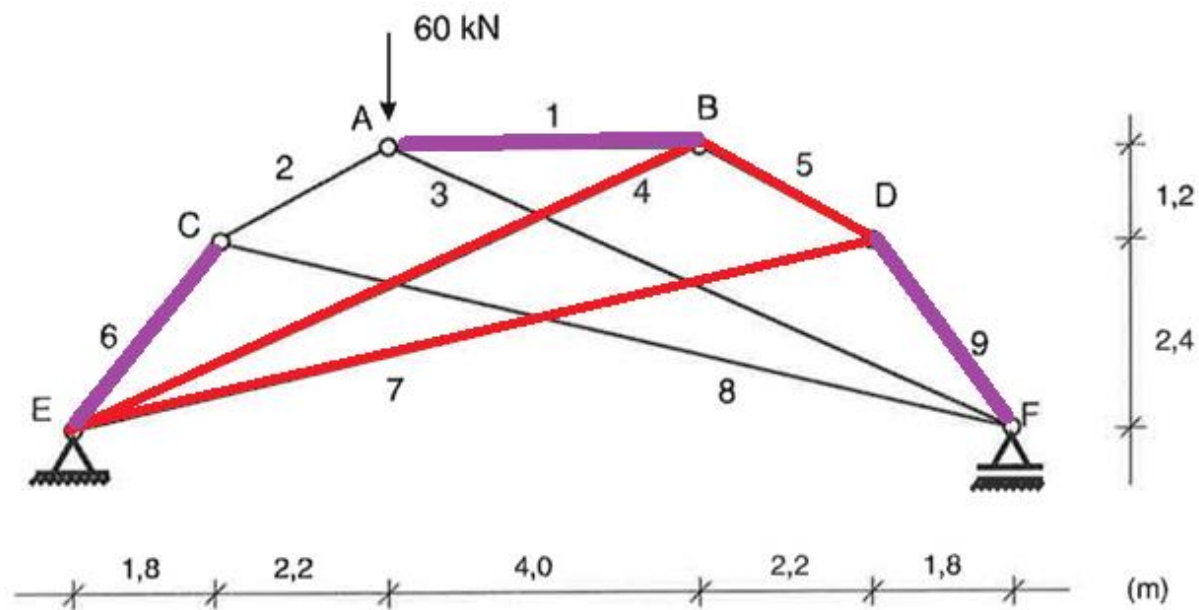
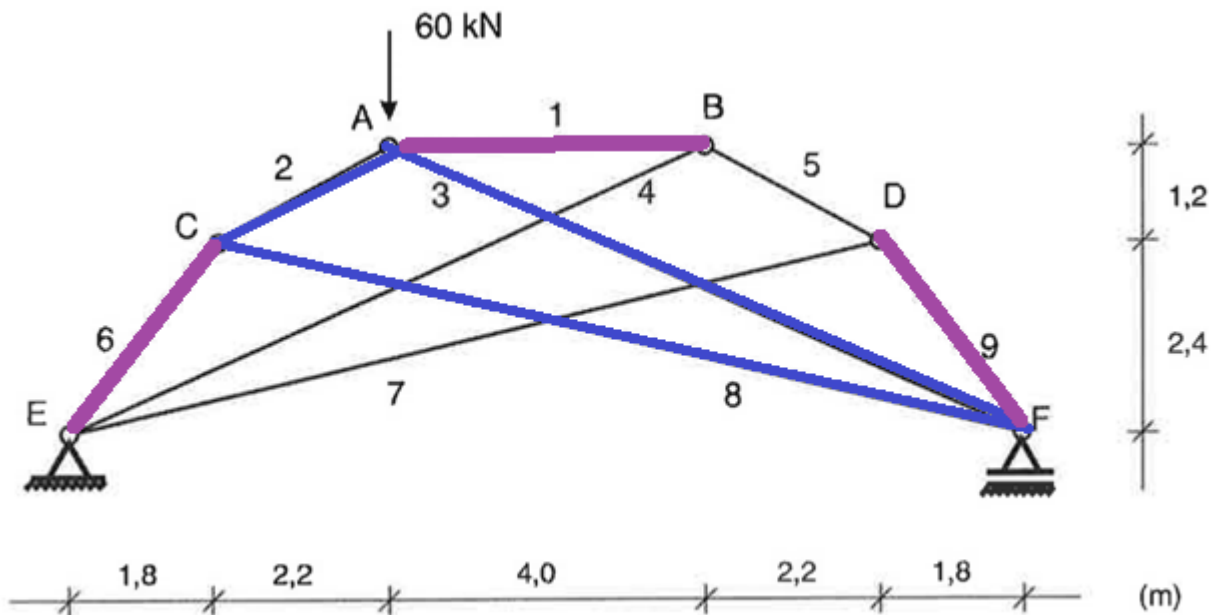
Exemplo 4



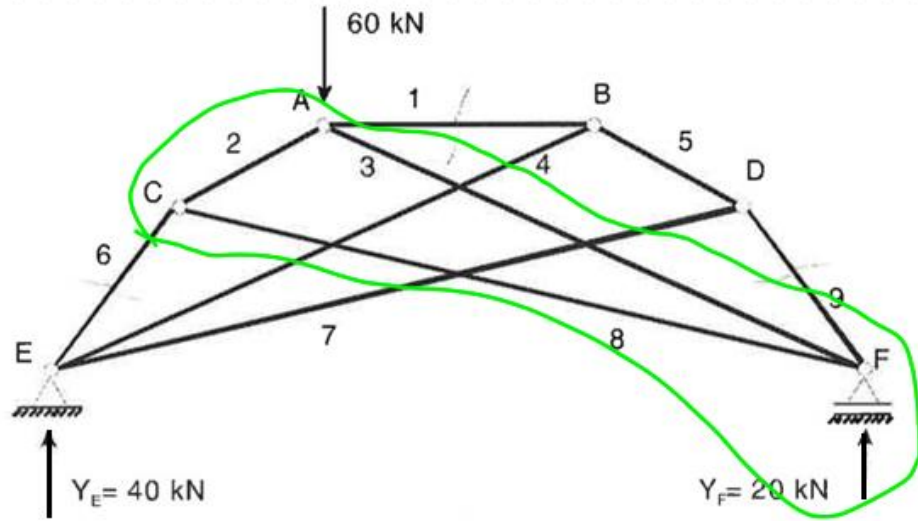
Cálculo das reações



Trelças simples conectadas pelas barras roxas



Exemplo 4



$$\sum X = 0 \quad -0,6 N_6 + N_1 - 0,6 N_9 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad -0,8 N_6 - 60 + 0,8 N_9 + 20 = 0$$

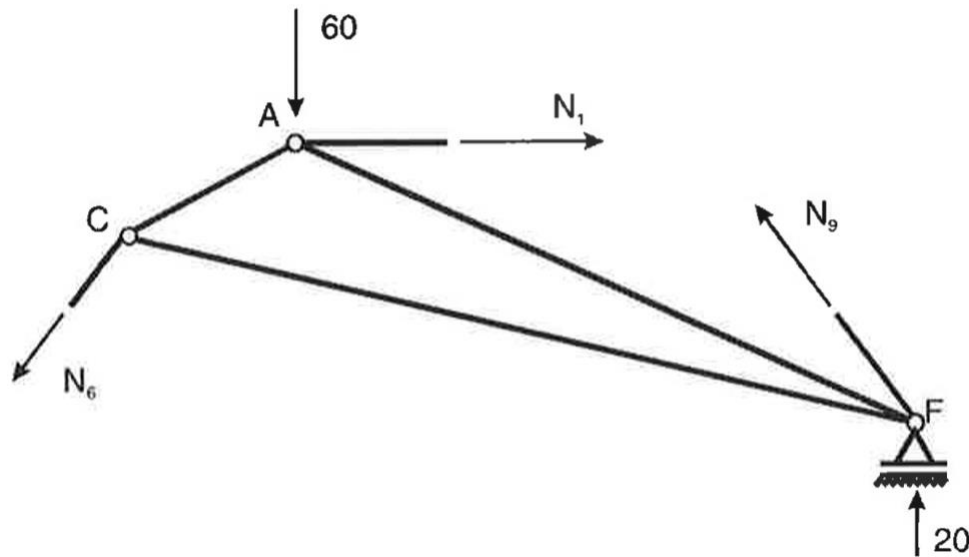
$$\sum M_F = 0 \quad 0,8 N_6 \cdot 10,2 + 0,6 N_6 \cdot 2,4 + 60 \cdot 8 - N_1 \cdot 3,6 = 0$$

ja resolução leva às forças normais procuradas:

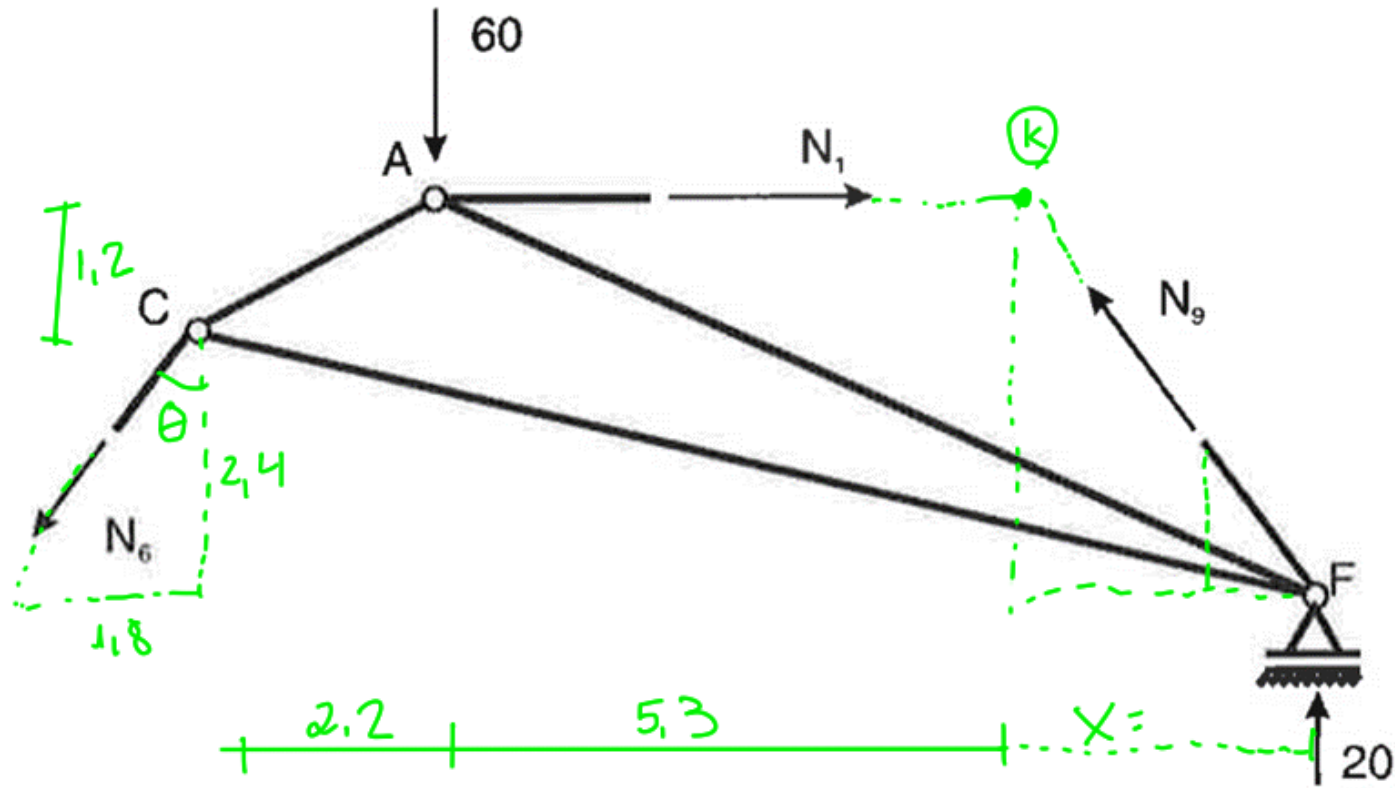
$$N_1 = -54,55 \text{ kN}$$

$$N_6 = -70,46 \text{ kN}$$

$$N_9 = -20,46 \text{ kN}$$



Exemplo 4

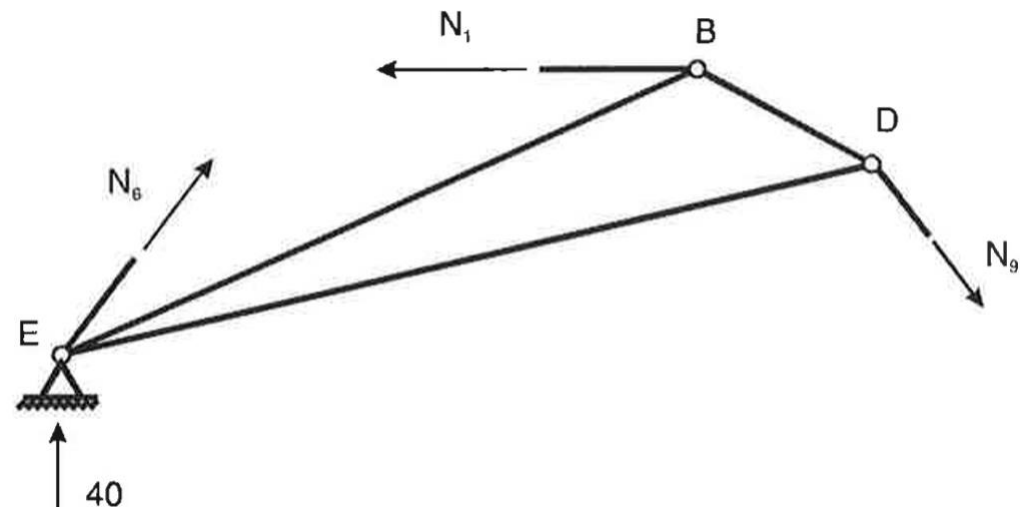
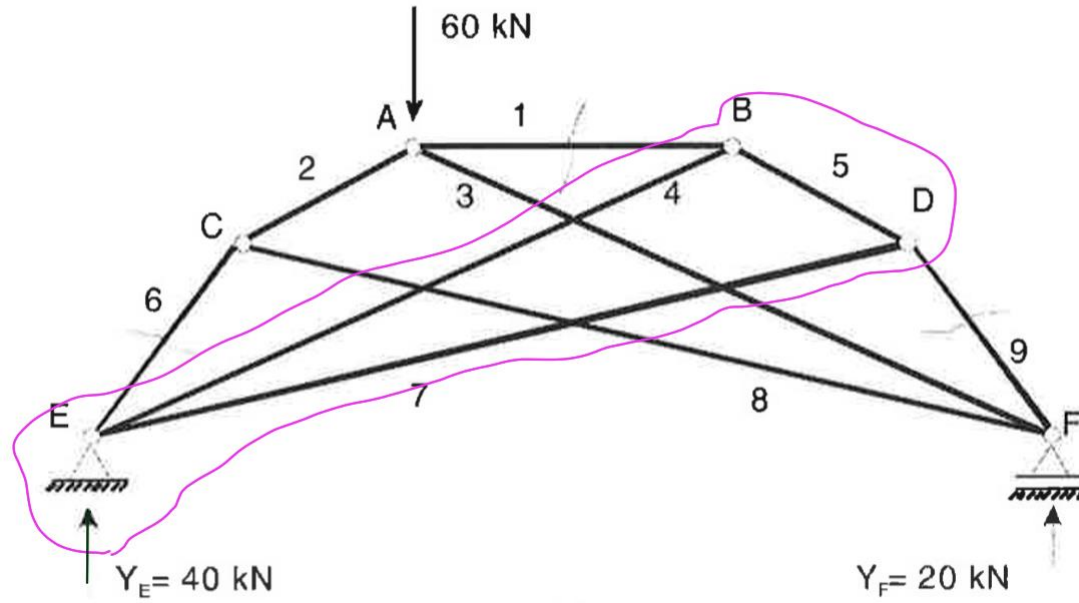


$$\frac{2,4}{1,8} = \frac{3,6}{X} \rightarrow x = 2,7 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \sum M_K = 0 : & 20 \cdot 2,7 + 60 \cdot (8 - 2,7) \\ & + (N_C \cos \theta) \cdot (10,2 - 2,7) \\ & = (N_C \sin \theta) \cdot 1,2 \end{aligned}$$

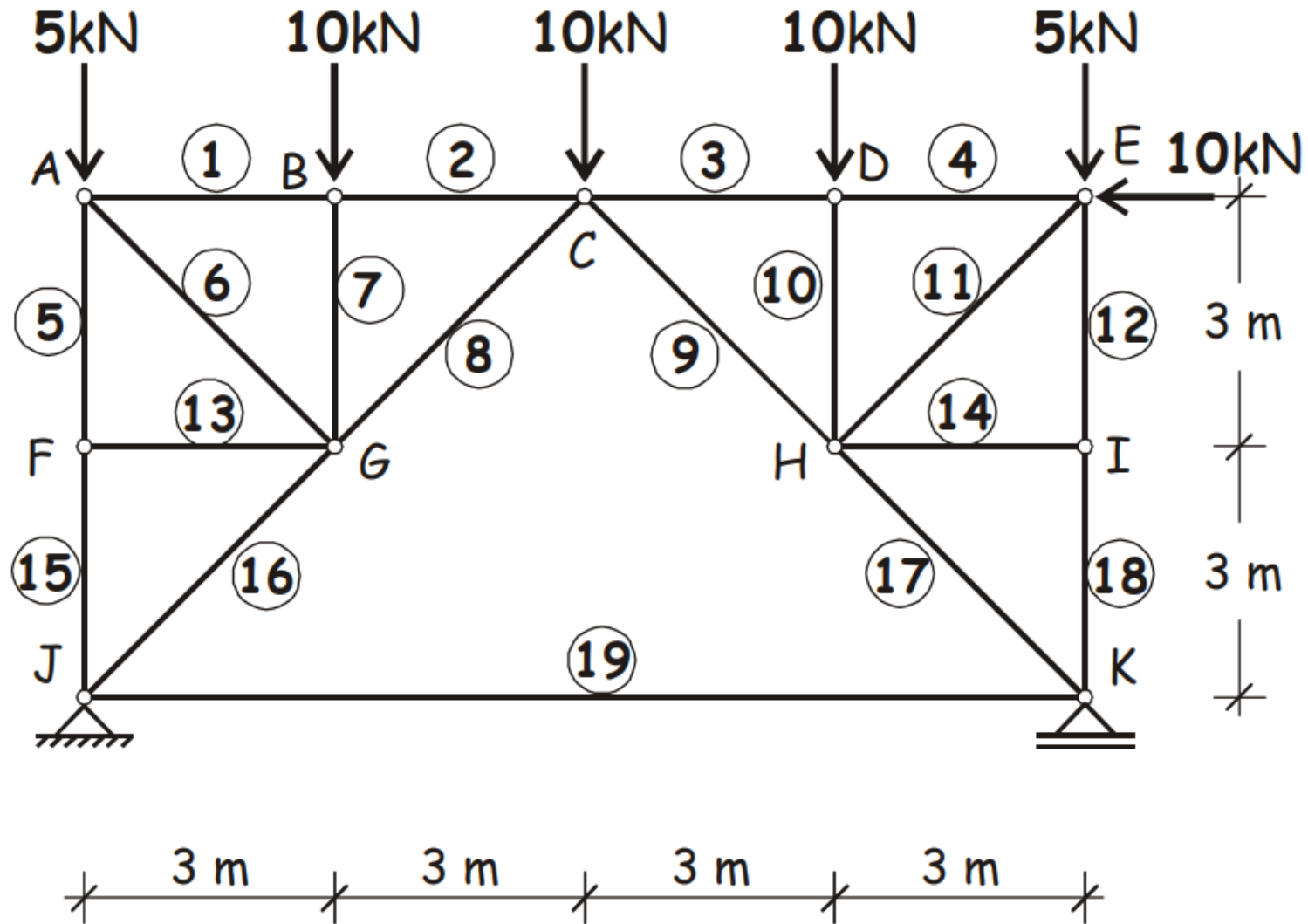
$$N_C = -372 / 5,28 = -70,45 \text{ kN}$$

Exemplo 4



Exemplo 5

Determinar as forças normais nas barras 7, 8, 16 e 19 da treliça da figura.



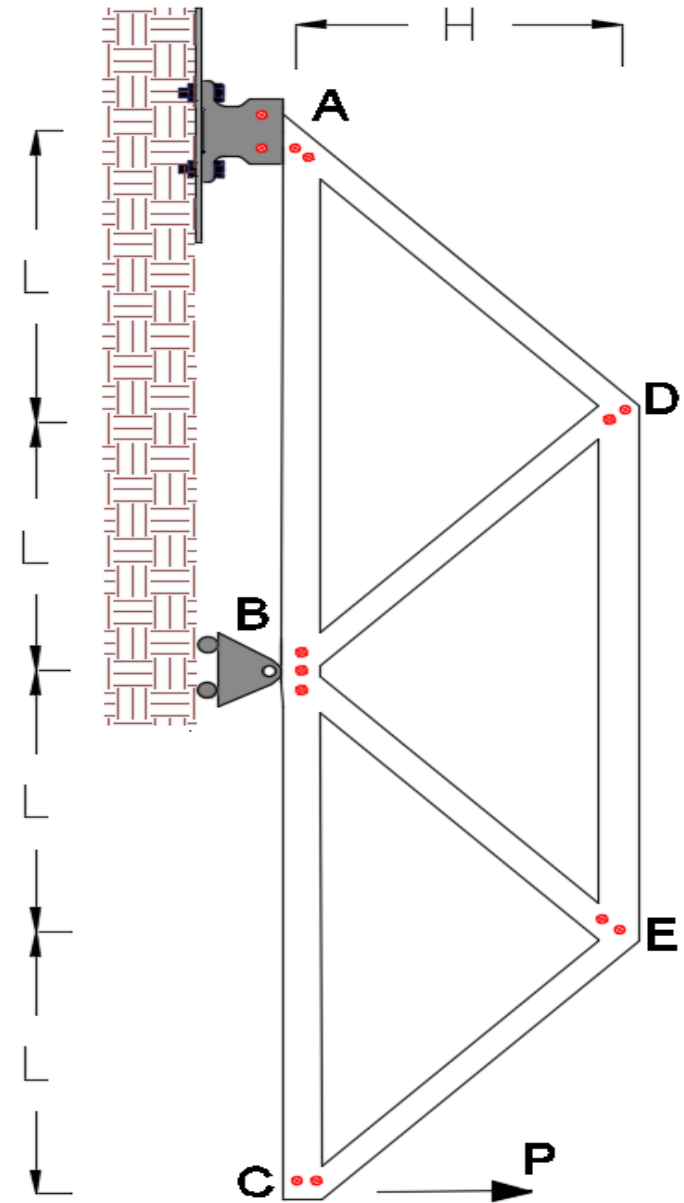
$$N_{16} = -21,213 \text{ kN}$$

$$N_7 = -10 \text{ kN}$$

$$N_8 = -14,142 \text{ kN}$$

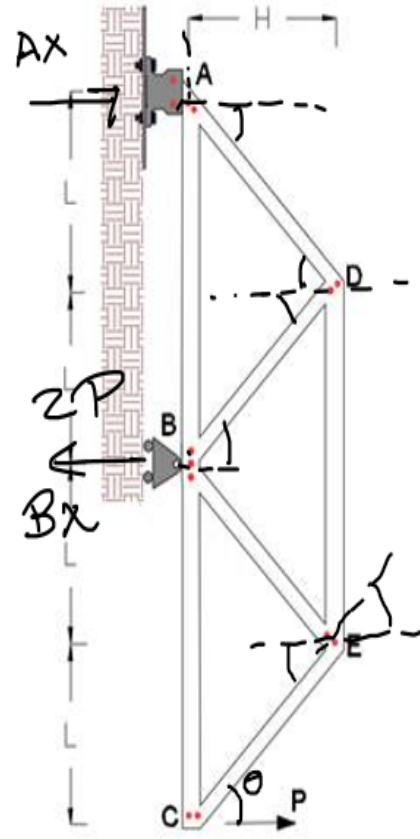
$$N_{19} = 5 \text{ kN}$$

3ª Questão (3 ptos): Para a treliça da figura, considere $H = 5000$ mm e $L = 4000$ mm. Sabendo-se que em todas as barras não se pode ultrapassar os valores de 400 kN à tração e 350 kN à compressão. Obtenha os esforços em todas as barras em termos de P e em seguida obtenha o maior valor possível para a força P na direção e sentido indicado. Indique a resposta na tabela.



Resposta:

N_{AB}	$0,8.P$
N_{AD}	$-P/(\cos 38) = -1,281.P$
N_{BD}	$P/(\cos 38) = 1,281.P$
N_{BE}	$P/(\cos 38) = 1,281.P$
N_{DE}	$-1,6.P$
N_{BC}	$0,8.P$
N_{EC}	$-P/(\cos 38) = -1,281.P$
P_{max}	$218,75 \text{ kN}$



$$\theta = 38,66^\circ$$

$$\sin \theta = 0,6247 \quad \cos \theta = 0,78087$$

$$\sum F_x = 0$$

$$P + N_{CE} \cos \theta = 0$$

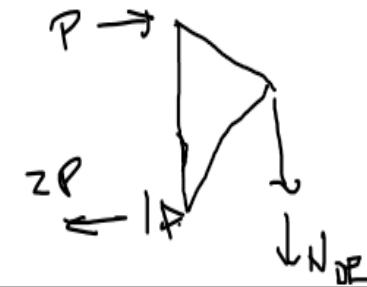
$$N_{CE} = -1,2806P = -\frac{P}{\cos \theta}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_{CE} \sin \theta + N_{BC} = 0$$

$$N_{BC} = 1,2806P \cdot 0,6247$$

$$N_{BC} = 0,8P$$



$$\sum M_B:$$

$$n_0'$$

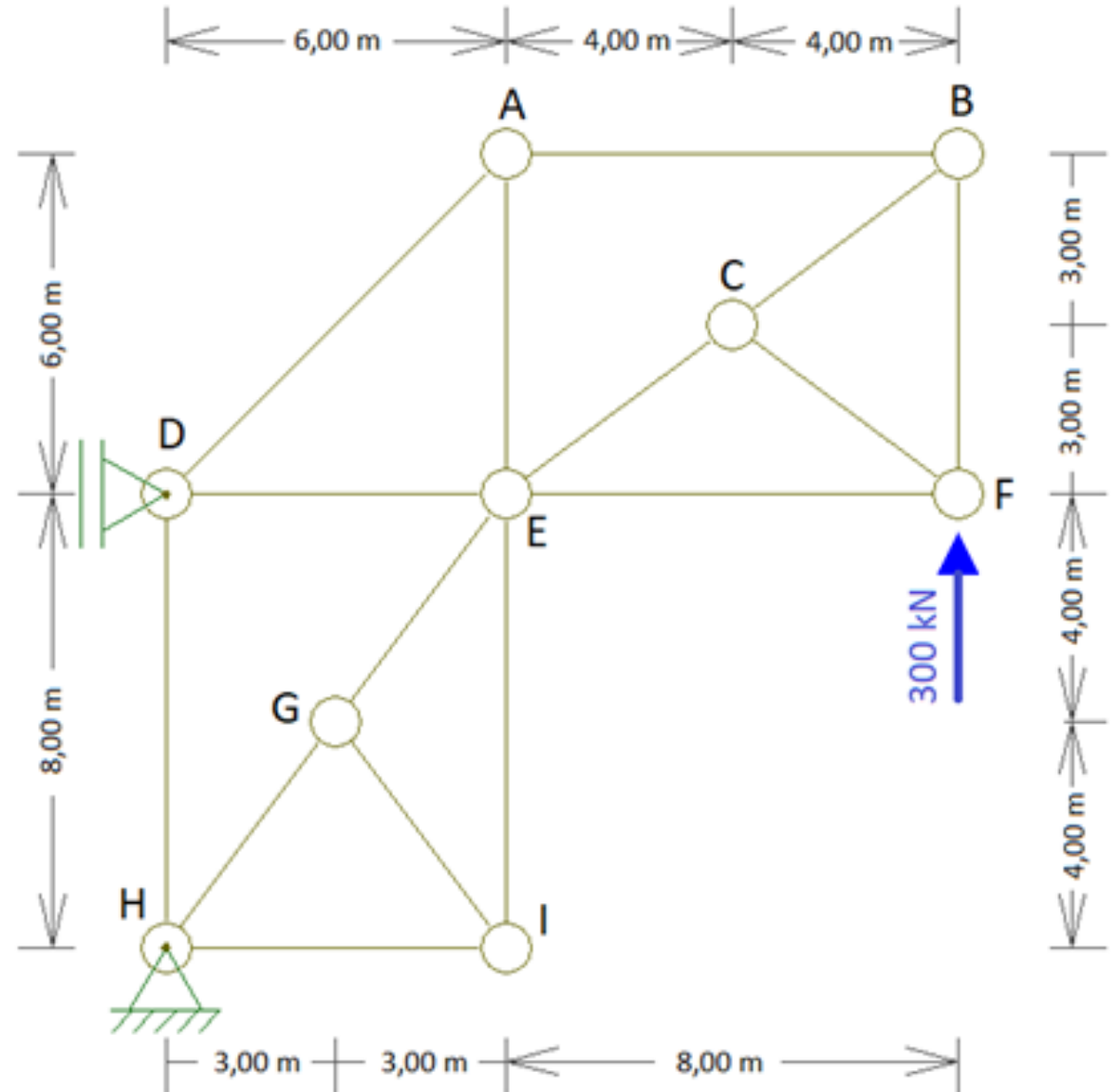
Resposta:

N_{AB}	$0,8P$
----------	--------

2ª. Questão (3 ptos)

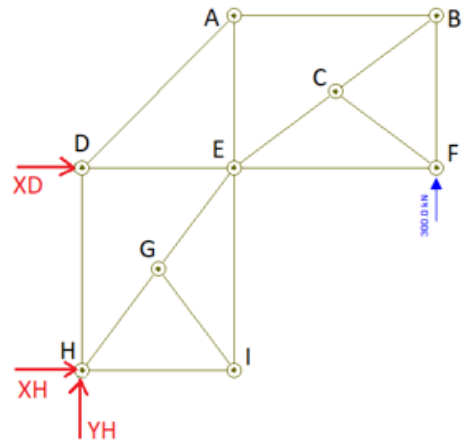
Para a treliça da figura, calcule:

- As reações de apoio
- A força normal na barra CF
- A força normal na barra CE
- A força normal na barra AE



Resolução

a)

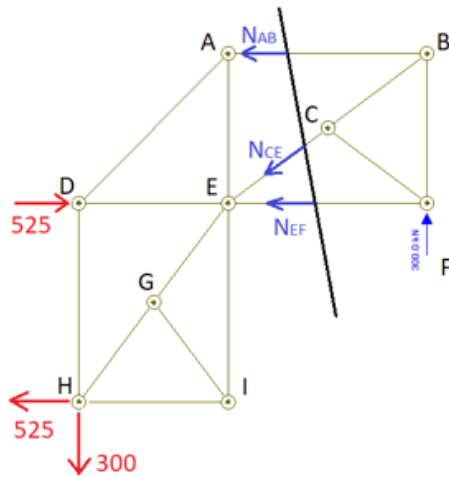


$$\Sigma Y = 0 \quad Y_H + 300 = 0 \quad \boxed{Y_H = -300 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_H = 0 \quad -X_D * 8 + 300 * 14 = 0 \quad \boxed{X_D = 525 \text{ kN}}$$

$$\Sigma X = 0 \quad X_D + X_H = 0 \quad \boxed{X_H = -525 \text{ kN}}$$

c)

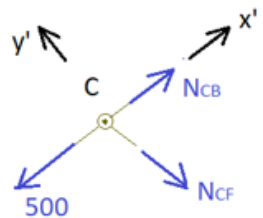


$$\Sigma Y = 0 \quad -N_{CE} * 0,6 + 300 = 0 \quad \boxed{N_{CE} = 500 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_E = 0 \quad N_{AB} * 6 + 300 * 8 = 0 \quad N_{AB} = -400 \text{ kN}$$

$$\Sigma X = 0 \quad -N_{AB} - N_{CE} * 0,8 - N_{EF} = 0 \quad N_{EF} = 0$$

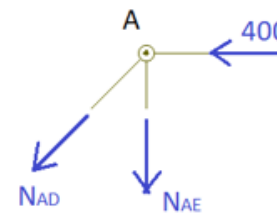
b)



$$\Sigma Y' = 0 \quad \boxed{N_{CF} = 0}$$

$$\Sigma X' = 0 \quad N_{CB} = 500 \text{ kN}$$

d)



$$\Sigma X = 0 \quad -N_{AD} * 0,707 - 400 = 0 \quad N_{AD} = -565,7 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0 \quad -N_{AE} - N_{AD} * 0,707 = 0 \quad \boxed{N_{AE} = 400 \text{ kN}}$$