Variável Binária e Interação

Gilberto A. Paula

Departamento de Estatística
IME-USP, Brasil
giapaula@ime.usp.br

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2023

Sumário

1. Introdução
2. Variável Explicativa Binária
3. Variável Explicativa Categórica
4. Referências

Objetivos

Neste material serão apresentados os seguintes conceitos:

- Variável Explicativa Binária
- Ausência e Presença de Interação
- Variável Explicativa Categórica
- Ausência e Presença de Interação

Sumário

1 Introdução

2 Variável Explicativa Binária

3 Variável Explicativa Categórica

4 Referências

Ausência de Interação

Supor o seguinte modelo de regressão linear múltipla:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i,$$

em que $y_1, \ldots, y_n$ são valores observados da variável resposta, x_{i2} representa os valores de uma variável aleatória binária tal que

$$x_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{grupo A} \\ 0 & \text{grupo B,} \end{cases}$$

enquanto x_{i3} representa valores observados de uma variável contínua e $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Ausência de Interação

Portanto, tem-se dois submodelos de regressão

- (Grupo A) $y_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i$
- (Grupo B) $y_i = \beta_1 + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i$

com valores esperados

- $\mathrm{E}_\mathrm{A}(Y_i|x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 x_{i3}$
- $\mathrm{E}_\mathrm{B}(Y_i|x_{i3}) = \beta_1 + \beta_3 x_{i3}$,

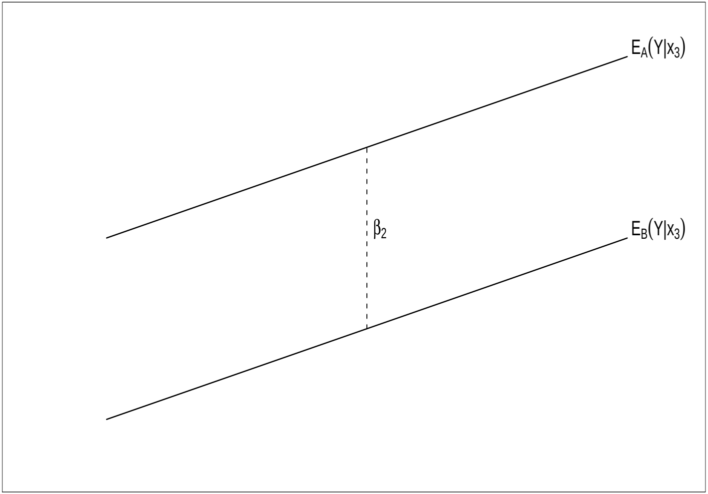
para $i = 1, \ldots, n$.

Assim, $\mathrm{E}_\mathrm{A}(Y_i|x_{i3}) - \mathrm{E}_\mathrm{B}(Y_i|x_{i3}) = \beta_2$, ausência de interação entre as variáveis explicativas X_2 e X_3.

Definição

A diferença entre os valores esperados entre dois níveis (valores) quaisquer de um fator (variável) não muda à medida que variam os níveis do outro fator (outra variável). Neste modelo tem-se que β_2 não muda à medida que variam os valores de X_3.

Ilustração Ausência de Interação



Ausência de Interação

Supondo que o grupo A tem n_1 elementos e o grupo B n_2 elementos o modelo com ausência de interação entre a variável binária X_2 e a variável contínua X_3 pode ser expresso na forma alternativa:

$$y_{ij} = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{ij3} + \epsilon_{ij},$$

em que $j = 1, \ldots, n_i$ e $i = 1, 2$.

Ausência de Interação

Em forma matricial o modelo fica dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top)^\top$ com $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, \ldots, y_{1n_1})^\top$, $\mathbf{y}_2 = (y_{21}, \ldots, y_{2n_2})^\top$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ e matriz $\mathbf{X}$ de dimensão $(n_1 + n_2) \times 3$ dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{113} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & x_{1n_13} \\ 1 & 0 & x_{213} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_{2n_23} \end{bmatrix}.$$

Presença de Interação

Supor agora o seguinte modelo de regressão linear múltipla:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i2} x_{i3} + \epsilon_i,$$

em que $y_1, \ldots, y_n$ são valores observados da variável resposta, x_{i2} representa os valores de uma variável aleatória binária tal que

$$x_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{grupo A} \\ 0 & \text{grupo B}, \end{cases}$$

enquanto x_{i3} representa valores observados de uma variável contínua e $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \text{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Presença de Interação

Portanto, tem-se dois submodelos de regressão

- (Grupo A) $y_i = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i3} + \epsilon_i$
- (Grupo B) $y_i = \beta_1 + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i$

com valores esperados

- $\mathrm{E}_{\mathrm{A}}(Y_i|x_{i3}) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i3}$
- $\mathrm{E}_{\mathrm{B}}(Y_i|x_{i3}) = \beta_1 + \beta_3 x_{i3}$,

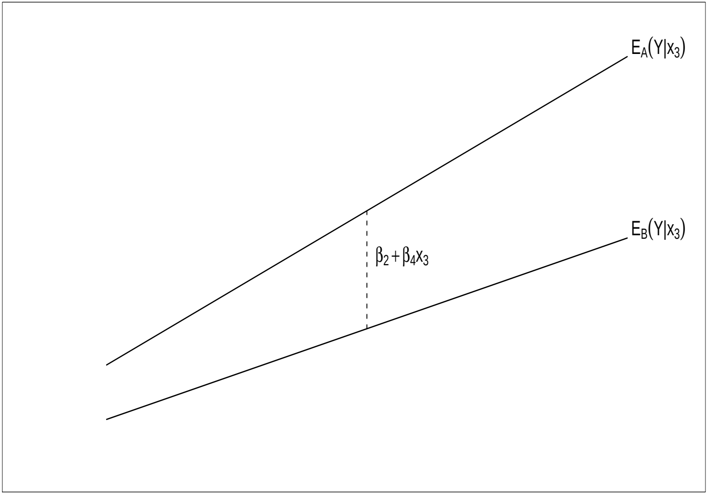
para $i = 1, \ldots, n$.

Assim, $\mathrm{E}_{\mathrm{A}}(Y_i|x_{i3}) - \mathrm{E}_{\mathrm{B}}(Y_i|x_{i3}) = \beta_2 + \beta_4 x_{i3}$, presença de interação entre as variáveis explicativas X_2 e X_3.

Definição

A diferença entre os valores esperados entre dois níveis (valores) quaisquer de um fator (variável) não é constante à medida que variam os níveis do outro fator (outra variável). Neste modelo tem-se que a diferença entre os valores esperados para os grupos A e B depende dos valores da variável X_3.

Ilustração Presença de Interação



Presença de Interação

Supondo que o grupo A tem n_1 elementos e o grupo B n_2 elementos o modelo com presença de interação entre a variável binária X_2 e a variável contínua X_3 pode ser expresso na forma alternativa:

$$y_{ij} = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{ij3} + \beta_4 x_{i2} x_{ij3} + \epsilon_{ij},$$

em que $j = 1, \ldots, n_i$ e $i = 1, 2$.

Presença de Interação

Em forma matricial o modelo fica dado por

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top)^\top$ com $\mathbf{y}_1 = (y_{11}, \ldots, y_{1n_1})^\top$, $\mathbf{y}_2 = (y_{21}, \ldots, y_{2n_2})^\top$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^\top$ e matriz $\mathbf{X}$ de dimensão $(n_1 + n_2) \times 4$ dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x_{113} & x_{113} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & x_{1n_13} & x_{1n_13} \\ 1 & 0 & x_{213} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_{2n_23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sumário

1 Introdução

2 Variável Explicativa Binária

3 Variável Explicativa Categórica

4 Referências

Formulação do Modelo

Supor variável explicativa com três níveis

$$X = \begin{cases} 1 & \text{grupo A} \\ 2 & \text{grupo B} \\ 3 & \text{grupo C.} \end{cases}$$

Um maneira de representar essa variável explicativa num modelo de regressão é atribuindo a cada grupo uma variável binária:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i,$$

em que $y_1, \ldots, y_n$ denotam os valores observados da variável resposta, x_{i1}, x_{i2} e x_{i3} são os valores observados das variáveis binárias representando os grupos e $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, para $j = 1, \ldots, n$.

Formulação do Modelo

Supondo que os grupos A, B e C têm n_1, n_2 e n_3 elementos, respectivamente, o modelo pode ser expresso na forma matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon},$$

em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top, \mathbf{y}_3^\top)^\top$ com $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in_i})^\top$, para $i = 1, 2, 3$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)^\top$ e matriz $\mathbf{X}$ de dimensão $(n_1 + n_2 + n_3) \times 4$.

Formulação do Modelo

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz **X** não tem posto coluna completo, a 1ª coluna é a soma das outras três colunas.

Formulação do Modelo

Uma solução é reduzir o número de colunas da matriz modelo impondo alguma restrição nos parâmetros. Procedimentos mais utilizados:

- Restrição nos Parâmetros: $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, que implica em $\beta_1 = -\beta_2 - \beta_3$.
- Casela de Referência: um dos coeficientes é fixado como sendo zero. Por exemplo, fazendo $\beta_1 = 0$ o grupo A será denominado casela de referência.

Nesses dois casos $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_2, \beta_3)^\top$ e a matriz modelo terá dimensão $n \times 3$ com posto coluna completo.

Formulação do Modelo

Matriz modelo quando $\beta_1 = -\beta_2 - \beta_3$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formulação do Modelo

Matriz modelo quando $\beta_1 = 0$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ausência de Interação

O modelo com casela de referência no grupo A pode ser expresso na seguinte forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i,$$

em que $y_1, \ldots, y_n$ denotam os valores observados da variável resposta, x_{i2} e x_{i3} são valores de variáveis binárias representando os grupos B e C, respectivamente, enquanto x_{i4} representa os valores observados de uma variável contínua e $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Ausência de Interação

Portanto, tem-se três submodelos

- (Grupo A) $y_i = \beta_0 + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i$
- (Grupo B) $y_i = \beta_0 + \beta_2 + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i$
- (Grupo C) $y_i = \beta_0 + \beta_3 + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i$

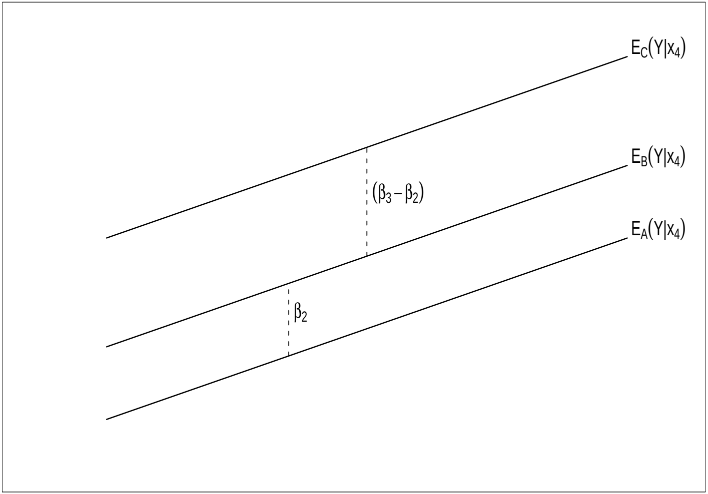
com diferenças de valores esperados

- $\mathrm{E}_{\mathrm{B}}(Y_i|x_{i4}) - \mathrm{E}_{\mathrm{A}}(Y_i|x_{i4}) = \beta_2$
- $\mathrm{E}_{\mathrm{C}}(Y_i|x_{i4}) - \mathrm{E}_{\mathrm{A}}(Y_i|x_{i4}) = \beta_3$,

para $i = 1, \ldots, n$.

Assim, os efeitos β_2 e β_3 são incrementos nos valores esperados dos grupos B e C, respectivamente, com relação ao grupo A.

Ilustração Ausência de Interação



Ausência de Interação

Em forma matricial o modelo com ausência de interação fica dado por $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \epsilon$, em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top, \mathbf{y}_3^\top)^\top$ com $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in_i})^\top$, para $i = 1, 2, 3$, $\beta = (\beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^\top$ e matriz $\mathbf{X}$ dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{114} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & x_{1n_14} \\ 1 & 1 & 0 & x_{214} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & x_{2n_24} \\ 1 & 0 & 1 & x_{314} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & x_{3n_34} \end{bmatrix}.$$

Presença de Interação

O modelo com interação ente a variável categórica X e a variável contínua X_4 pode ser expresso na seguinte forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i2} x_{i4} + \beta_6 x_{i3} x_{i4} + \epsilon_i,$$

em que $y_1, \ldots, y_n$ denotam os valores observados da variável resposta, x_{i2} e x_{i3} são valores de variáveis binárias representando os grupos B e C, respectivamente, enquanto x_{i4} representa os valores observados de uma variável contínua e $\epsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$.

Presença de Interação

Portanto, tem-se três submodelos

- (Grupo A) $y_i = \beta_0 + \beta_4 x_{i4} + \epsilon_i$
- (Grupo B) $y_i = \beta_0 + \beta_2 + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i4} + \epsilon_i$
- (Grupo C) $y_i = \beta_0 + \beta_3 + \beta_4 x_{i4} + \beta_6 x_{i4} + \epsilon_i$

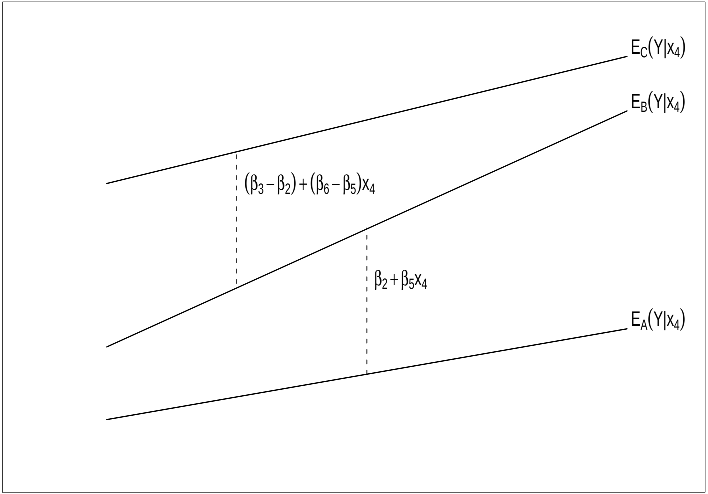
com diferenças de valores esperados

- $\mathrm{E_B}(Y_i|x_{i4}) - \mathrm{E_A}(Y_i|x_{i4}) = \beta_2 + \beta_5 x_{i4}$
- $\mathrm{E_C}(Y_i|x_{i4}) - \mathrm{E_A}(Y_i|x_{i4}) = \beta_3 + \beta_6 x_{i4}$,

para $i = 1, \ldots, n$.

Assim, nota-se que as diferenças entre os valores esperados dependem dos valores da variável explicativa X_4.

Ilustração Presença de Interação



Presença de Interação

Em forma matricial o modelo com presença de interação fica dado por $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$, em que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \mathbf{y}_2^\top, \mathbf{y}_3^\top)^\top$ com $\mathbf{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{in_i})^\top$, para $i = 1, 2, 3$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)^\top$ e matriz $\mathbf{X}$ dada por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{114} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & x_{1n_14} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & x_{214} & x_{214} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & x_{2n_24} & x_{2n_24} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x_{314} & 0 & x_{314} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & x_{3n_34} & 0 & x_{3n_34} \end{bmatrix}.$$

Sumário

1 Introdução

2 Variável Explicativa Binária

3 Variável Explicativa Categórica

4 Referências

Referência

- Montgomery, D. C.; Peck, E. A. e Vining, G. G. (2021). *Introduction to Linear Regression Analysis, 6th Edition*. Hoboken: Wiley.