UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

ZEB1058 PESQUISA OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS AGROPECUÁRIOS

PROF. DR. FERNANDO L. CANEPPELE

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

ZEB1058 – TÓPICO 09: PARTE 3/3

DUALIDADE: TEOREMAS E INTERPRETAÇÕES

- RESTRIÇÕES: ATUANTES vs. NÃO-ATUANTES
- PREÇO-SOMBRA (OU VALOR MARGINAL)
- DUALIDADE $\rightarrow$ TEOREMAS

Primal-dual: interpretação econômica

- Uso de recursos / aquisição de recursos adicionais
  - Exemplo: Deseja-se fabricar 2 tipos de produtos P1 e P2, cada qual exigindo homens-horas, material e espaço p/ estocagem conforme a tabela, junto com os lucros esperados. Em termos de disponibilidades destes recursos, há 10 homens-hora, 36 kg de material e 40 m² de espaço físico, respectivamente.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 \quad (\$)$$

$$\text{sujeito a :}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \quad (\mathit{trabalho}) \\ 6x_1 + 6x_2 &\le 36 \quad (\mathit{material}) \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 40 \quad (\mathit{espaço}) \\ x_1\ ,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Recursos exigidos	**P1**	**P2**
Trabalho (homens-hora/unid.)	1	2
Matéria-prima (kg/unid.)	6	6
Espaço físico (m^2/unid.)	8	4
Lucro esperado ($/unid.)	**4**	**5**

Primal-dual: interpretação econômica

- Uso de recursos / aquisição de recursos adicionais
  - Exemplo: Deseja-se fabricar 2 tipos de produtos P1 e P2, cada qual exigindo homens-horas, material e espaço p/ estocagem conforme a tabela, junto com os lucros esperados. Em termos de disponibilidades destes recursos, há 10 homens-hora, 36 kg de material e 40 m² de espaço físico, respectivamente.

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2 \quad (\$)$$

sujeito a :

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (\textit{trabalho})$$
$$6x_1 + 6x_2 \leq 36 \quad (\textit{material})$$
$$8x_1 + 4x_2 \leq 40 \quad (\textit{espaço})$$
$$x_1 \,,\; x_2 \geq 0$$

SOLUÇÃO ÓTIMA:

$x_1 = 2$ **e** $x_2 = 4$

↓

$Z = 28$

Qual é a influência de cada recurso?

Restrições: atuantes e não-atuantes

- Restrições (tipo 'teto') $\rightarrow$ existência ou não de folgas
  - Primal (Simplex): variáveis de folga
    - Fora da base $\rightarrow$ nulas
    - Na base $\rightarrow$ não nulas
  - Inserindo solução ótimas nas restrições do Primal:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 6x_1 + 6x_2 &\le 36 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 40 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[x_2=4]{x_1=2} \left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10\ (\textit{trabalho}) \\ 6x_1 + 6x_2 &= 36\ (\textit{material}) \\ 8x_1 + 4x_2 &= 32\ (\textit{espaço}) \end{aligned}\right.$$

atuantes (trabalho, material)

$8x_1 + 4x_2 = 32\ (\textit{espaço}) \rightarrow$ **não atuante**

- Tomada de decisão $\rightarrow$ investir nas restrições atuantes?
  - Qual o valor a ser pago para ampliar cada restrição atuante?
  - Problema Dual $\rightarrow$ interpretação das variáveis de decisão

Preço-sombra (ou valor marginal)

PROBLEMA PRIMAL

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

sujeito a :

$$x_1 + 2x_2 \le 10 \quad (trabalho)$$

$$6x_1 + 6x_2 \le 36 \quad (material)$$

$$8x_1 + 4x_2 \le 40 \quad (espaço)$$

$$x_1 \, , \; x_2 \ge 0$$

PROBLEMA DUAL

$$\text{Min } D = 10y_1 + 36y_2 + 40y_3$$

sujeito a :

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \ge 4 \quad (\text{P1})$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 5 \quad (\text{P2})$$

$$\boxed{y_1 \, , \; y_2 \, , \; y_3} \ge 0$$

VALOR MARGINAL:
Variação da função-objetivo por incremento unitário (custo máximo p/ ampliar 1 unidade) de uma restrição

- y_1 = **valor marginal de 1 homem-hora**
- y_2 = **valor marginal de 1 kg de material**
- y_3 = **valor marginal de 1 m² de espaço**

Preço-sombra (ou valor marginal)

SOLUÇÃO ÓTIMA:

$$D = 28$$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{y_1 = 1 \ , \ y_2 = 0.5 \ , \ y_3 = 0}$$

Restrição atuante	Restrição não-atuante
Preço-sombra não-nulo	Preço-sombra nulo

PROBLEMA DUAL

$$\text{Min } D = 10y_1 + 36y_2 + 40y_3$$

sujeito a :

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4 \quad \text{(P1)}$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5 \quad \text{(P2)}$$

$$y_1 \, , y_2 \, , y_3 \geq 0$$

- Restrições no Problema Dual $\rightarrow$ interpretação:
  - LHS = contribuição de cada recurso à grandeza maximizada
  - RHS = valor mínimo ('piso') esperado à grandeza maximizada

Problema Dual: teoremas

- O dual do problema Dual é o problema Primal.
- Teorema Fraco da Dualidade
  - Se há soluções viáveis aos problemas Primal (maximização) e Dual, então para **quaisquer soluções viáveis** x (do Primal) e y (do Dual) tem-se que: $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; Z \leq D$.
- Teorema Forte da Dualidade
  - Se existe uma **solução ótima** $\mathbf{x}^*$ para o Primal (maximização), então existe uma **solução ótima** $\mathbf{y}^*$ para o Dual e, além disso (em termos de valores ótimos): $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{y}^* \;\Leftrightarrow\; Z^* = D^*$.
- Teorema das Folgas Complementares
  - **Solução ótima**: a uma restrição atuante (esgotada) no Primal corresponde uma variável não-nula no Dual (e vice-versa).