

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA**

**ZEB1058 PESQUISA  
OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO  
DE SISTEMAS AGROPECUÁRIOS**



**PROF. DR. FERNANDO L. CANEPPELE**

**PROF. DR. JOSÉ A. RABI**

**DEPTO. ENGENHARIA DE BIODISSISTEMAS**

# SIMPLEX – NÃO PADRÃO: MÉTODO DE DUAS FASES



- FASE 1 → FUNÇÃO-OBJETIVO ARTIFICIAL
- FASE 2 → FUNÇÃO-OBJETIVO ORIGINAL
- QUADRO → ATUALIZAÇÕES INADEQUADAS

# Método de 2 fases: restrições tipo “=”

- Fase 1: problema modificado → outra função-objetivo
  - Zerar todas as variáveis artificiais → função-objetivo artificial

$$\text{Min } w = \sum_i A_i \quad \Leftrightarrow \quad \text{Max } (-w) = -\sum_i A_i$$

- Exemplo: 2 variáveis artificiais  $A_1$  e  $A_2$  →  $\text{Max } (-w) = -A_1 - A_2$

$$\left. \begin{array}{l} Z - 3x_1 + 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + A_1 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (-w) + A_1 + A_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 2x_2 + A_1 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18 \\ x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Fase 1: solução do problema modificado

– Aplicação do Método Simplex



Por exemplo: na forma tabular



Quadro Simplex inicial:

$$(-w) + A_1 + A_2 = 0$$

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$2x_2 + A_1 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 18$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	0	1	1	0	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Inconsistências no Quadro Simplex inicial



Valor “1” aparece 2 vezes nas colunas  $A_1$  e  $A_2$  (básicas)



[nova linha 0] = [antiga linha 0] – [coef.col.  $A_1$  linha 0] × [linha 2]  
 – [coef.col.  $A_2$  linha 0] × [linha 3]

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		(-w)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
(-w)	0	1	0	0	0	1	1	0	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Correção do problema modificado

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	0	1	1	0	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1'
  - Entra  $x_2$  → coeficiente mais negativo na equação 0
  - Opção arbitrária/inconveniente (contraexemplo): e se sair  $A_2$  ?  
(pois  $A_1 \Leftrightarrow$  menor termo independente  $\div$  coeficiente  $> 0$  de  $x_2$  )

$$[\text{nova linha pivô}] = [\text{antiga linha pivô}] \div [\text{número pivô}]$$

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef.col.pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	6
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	9



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1'

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	3	0	0	0	2	6	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	-3	0	0	1	-1	-6	
$x_2$	3	0	3/2	1	0	0	1/2	9	



não convém



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1
  - Opção arbitrária/alternativa (não é a melhor): e se entrar  $x_1$  ? (coeficiente também negativo na equação 0, além de  $x_2$  )
  - Sai  $x_3$  → menor termo independente ÷ coeficiente ( $> 0$ ) de  $x_1$   
 [nova linha pivô] = [antiga linha pivô] ÷ [número pivô]

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef. col. pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		(-w)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
(-w)	0	1	-3	-4	0	0	0	-30	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	4
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	6



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #1



variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	-3	-4	0	0	0	-30	
$x_3$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	3	2	0	0	1	18	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	-4	3	0	0	-18	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	0	2	-3	0	1	6	

# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #2
    - Entra  $x_2$  → único coeficiente negativo na equação 0
    - Sai  $A_2$  → menor termo independente ÷ coeficiente ( $> 0$ ) de  $x_2$
- [nova linha pivô] = [antiga linha pivô] ÷ [número pivô]

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef. col. pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	-4	3	0	0	-18	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	6
$A_2$	3	0	0	2	-3	0	1	6	3



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #2

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	-4	3	0	0	-18	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	2	0	1	0	12	
$A_2$	3	0	0	2	-3	0	1	6	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	-3	0	2	-6	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	0	3	1	-1	6	
$x_2$	3	0	0	1	$-3/2$	0	$1/2$	3	



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #3
    - Entra  $x_3$  → único coeficiente negativo na equação 0
    - Sai  $A_1$  → menor termo independente ÷ coeficiente ( $> 0$ ) de  $x_3$
- [nova linha pivô] = [antiga linha pivô] ÷ [número pivô]

$$[\text{nova linha } i] = [\text{antiga linha } i] - [\text{coef. col. pivô}] \times [\text{nova linha pivô}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	-3	0	2	-6	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	4
$A_1$	2	0	0	0	3	1	-1	6	2
$x_2$	3	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	



# Fase 1: função-objetivo artificial

- Solução do problema modificado → iteração #3 (fim)


variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	-3	0	2	-6	
$x_1$	1	0	1	0	1	0	0	4	
$A_1$	2	0	0	0	3	1	-1	6	
$x_2$	3	0	0	1	-3/2	0	1/2	3	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	0	1	1	0	
$x_1$	1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	
$x_3$	2	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	
$x_2$	3	0	0	1	0	1/2	0	6	



# Fase 2: função-objetivo original

- Solução do problema original → quadro atualizado



variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		$(-w)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$A_1$	$A_2$		
$(-w)$	0	1	0	0	0	1	1	0	
$x_1$	1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	
$x_3$	2	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2	
$x_2$	3	0	0	1	0	$1/2$	0	6	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
Z	0	1	$-3$	5	0			0	
$x_1$	1	0	1	0	0			2	
$x_3$	2	0	0	0	1			2	
$x_2$	3	0	0	1	0			6	

# Fase 2: função-objetivo original

- Inconsistências no quadro original atualizado



Eq. 0 com valores  $\neq 0$  (ou 1) nas colunas  $x_1$  e  $x_2$  (básicas)

$$[\text{nova linha 0}] = [\text{antiga linha 0}] - [\text{coef.col. } x_1 \text{ linha 0}] \times [\text{linha 1}] - [\text{coef.col. } x_2 \text{ linha 0}] \times [\text{linha 3}]$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
Z	0	1	-3	5	0			0	
$x_1$	1	0	1	0	0			2	
$x_3$	2	0	0	0	1			2	
$x_2$	3	0	0	1	0			6	





# Fase 2: função-objetivo original

- Correção do problema original atualizado

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
Z	0	1	-3	5	0			0	
$x_1$	1	0	1	0	0			2	
$x_3$	2	0	0	0	1			2	
$x_2$	3	0	0	1	0			6	

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
Z	0	1	0	0	0			-24	
$x_1$	1	0	1	0	0			2	
$x_3$	2	0	0	0	1			2	
$x_2$	3	0	0	1	0			6	



# Fase 2: função-objetivo original

- Problema original atualizado e corrigido → solução final
  - Inexistência de coeficientes negativos na equação (linha) 0



Solução viável inicial (quadro corrigido) é a solução ótima:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad Z = -24$$

variável básica	índice da eq.	coeficiente de:						termo indep.	valor da divisão
		Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$				
Z	0	1	0	0	0			-24	
$x_1$	1	0	1	0	0			2	
$x_3$	2	0	0	0	1			2	
$x_2$	3	0	0	1	0			6	

