

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – PIRASSUNUNGA

**ZEB1058 PESQUISA
OPERACIONAL E OTIMIZAÇÃO
DE SISTEMAS AGROPECUÁRIOS**



PROF. DR. FERNANDO L. CANEPPELE

PROF. DR. JOSÉ A. RABI

DEPTO. ENGENHARIA DE BIOSSISTEMAS

SIMPLEX – PADRÃO: MÉTODO ANALÍTICO



- APRIMORAMENTO ITERATIVO DA SOLUÇÃO
- DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL A ENTRAR NA BASE
- DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL A SAIR DA BASE

Aprimoramento iterativo da solução

- Busca iterativa pela solução ótima na região viável:

- Alternância entre variáveis básicas / variáveis não-básicas



Uma única variável entra no conjunto de variáveis básicas (base)

Uma única variável sai do conjunto de variáveis básicas (base)

- Determinação da variável que entra na base:



Maior incremento possível para Z → maior coeficiente positivo

- Determinação da variável que sai da base:



Condição de não-negatividade → limitação à variável que entra

- Atualização do dicionário devido à alteração entre as variáveis



Aprimoramento iterativo da solução

- 1ª iteração

- Variável que entra na base → maior aumento possível de Z

$$Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \quad (\text{escolha arbitrária: "empate" c/ } x_2)$$

- Variável que sai da base $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Condição de não-negatividade} \\ - \text{Limitação ao crescimento de } x_1 \end{array} \right.$


$$\left. \begin{array}{l} x_1 \neq 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 3 \\ x_5 = 2 + x_1 - 3x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \geq -2 \\ x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 2 \\ x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \leq 1 \end{array} \right.$$



Aprimoramento iterativo da solução

- 1ª iteração (continuação)

– Atualização do dicionário $\rightarrow x_1$ em função de x_2, x_3, x_7


$$\left. \begin{array}{l} x_4 = 3 - x_1 - 3x_2 - x_3 \\ x_5 = 2 + x_1 - 3x_3 \\ x_6 = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_7 = 2 - 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ Z = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 \text{ entra} \\ \longrightarrow \\ x_7 \text{ sai} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_5 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7 \\ x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ Z = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_7 \end{array} \right.$$

– Nova solução óbvia (trivial) viável:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2, x_5 = 3, x_6 = 2, x_7 = 0 \Rightarrow Z = 5$$

Aprimoramento iterativo da solução

- 2ª iteração

- Variável que entra na base → maior aumento possível de Z

$$Z = 5 - \frac{5}{2} x_2 + \frac{11}{2} x_3 - \frac{5}{2} x_7$$

- Variável que sai da base $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Condição de não-negatividade} \\ - \text{Limitação ao crescimento de } x_3 \end{array} \right.$


$$\left. \begin{array}{l} x_7 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 2 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{3}{2} x_3 + \frac{1}{2} x_7 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \frac{4}{3} \\ x_5 = 3 - \frac{3}{2} x_2 - \frac{5}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_7 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \frac{6}{5} \\ x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \frac{2}{3} \\ x_1 = 1 - \frac{3}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 - \frac{1}{2} x_7 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq -2 \end{array} \right.$$



Aprimoramento iterativo da solução

- 2ª iteração (continuação)

– Atualização do dicionário $\rightarrow x_3$ em função de x_2, x_6, x_7


$$\left. \begin{array}{l} x_4 = 2 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_7 \\ x_5 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ x_6 = 2 + 4x_2 - 3x_3 + x_7 \\ x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_7 \\ Z = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_3 \text{ entra} \\ \longrightarrow \\ x_6 \text{ sai} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7 \\ x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 \\ x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7 \\ Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7 \end{array} \right.$$

– Nova solução óbvia (trivial) viável:

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 1, x_5 = \frac{4}{3}, x_6 = 0, x_7 = 0 \Rightarrow Z = \frac{26}{3}$$

Aprimoramento iterativo da solução

- 3ª iteração

- Variável que entra na base → maior aumento possível de Z

$$Z = \frac{26}{3} + \frac{29}{6} x_2 - \frac{11}{6} x_6 - \frac{2}{3} x_7$$

- Variável que sai da base $\left\{ \begin{array}{l} - \text{Condição de não-negatividade} \\ - \text{Limitação ao crescimento de } x_2 \end{array} \right.$


$$\left. \begin{array}{l} x_7 = 0 \\ x_2 \neq 0 \\ x_6 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 1 - \frac{7}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq \frac{2}{7} \\ x_5 = \frac{4}{3} - \frac{29}{6} x_2 + \frac{5}{6} x_6 - \frac{4}{3} x_7 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq \frac{8}{29} \\ x_3 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_6 + \frac{1}{3} x_7 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \geq -\frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{6} x_2 - \frac{1}{6} x_6 - \frac{1}{3} x_7 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \leq \frac{8}{5} \end{array} \right.$$



Aprimoramento iterativo da solução

- 3ª iteração (continuação)

- Atualização do dicionário $\rightarrow x_2$ em função de x_5, x_6, x_7


$$\left. \begin{aligned} x_4 &= 1 - \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_6 \\ x_5 &= \frac{4}{3} - \frac{29}{6}x_2 + \frac{5}{6}x_6 - \frac{4}{3}x_7 \\ x_3 &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 \\ x_1 &= \frac{4}{3} - \frac{5}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_6 - \frac{1}{3}x_7 \\ Z &= \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{11}{6}x_6 - \frac{2}{3}x_7 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x_2 \text{ entra} \\ \longrightarrow \\ x_5 \text{ sai} \end{array} \left\{ \begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{29} + \frac{21}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 + \frac{28}{29}x_7 \\ x_2 &= \frac{8}{29} - \frac{6}{29}x_5 + \frac{5}{29}x_6 - \frac{8}{29}x_7 \\ x_3 &= \frac{30}{29} - \frac{8}{29}x_5 - \frac{3}{29}x_6 - \frac{1}{29}x_7 \\ x_1 &= \frac{32}{29} + \frac{5}{29}x_5 - \frac{9}{29}x_6 - \frac{3}{29}x_7 \\ Z &= 10 - x_5 - x_6 - 2x_7 \end{aligned} \right.$$

- Nova solução óbvia (trivial) viável \Rightarrow solução ótima:

$$x_1 = \frac{32}{29}, x_2 = \frac{8}{29}, x_3 = \frac{30}{29}, x_4 = \frac{1}{29}, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0 \Rightarrow Z = 10$$