AULA :

Teste de Hipoteses sobre proporção

O caso de duas hipóteses precisas

Um buffet infantil montou uma piscina de bolinhas para crianças e contratou uma empresa para fornecer bolinhas brancas e pretas para encher a piscina. Porém aconteceu um desentendimento no qual o fornecedor alega que 40% das bolinhas na piscina são pretas enquanto que o administrador do buffet acredita que só 30% são pretas. O desentendimento afeta o pagamento do fornecedor, pois bolinhas pretas são mais caras (para que a cor não desbote com a ação do sol, usa-se um pigmento caro para a sua coloração).

Posso revelar de onde veio o desentendimento:

o **fornecedor** contou que dentro das 100 caixas de bolinhas carregadas no caminhão de entrega haviam 40 com bolas pretas,

enquanto que ao fiscalizar o descarregamento do caminhão, o **administrador** do buffet anotou que haviam 30 de tais caixas.

De fato, um dos dois errou na contagem. E não há como contar tudo novamente, pois as bolinhas já estão na piscina e todas ficaram bem misturadas. Nenhum dos dois quer esvaziar a piscina e contar todas as bolinhas.

Com o intuito de resolver o impasse, os lados conflitantes concordaram sobre o seguinte:

- escolher aleatoriamente 30 bolinhas, uma após a outra, com reposição;

- caso a quantidade de bolinhas pretas dentro das escolhidas for 11 ou mais, tomar-se-á a decisão que são 40% de bolinhas pretas na piscina, mas caso contrário, quer dizer, caso tal quantidade for 10 ou menos, a decisão será que são 30% das bolinhas pretas na piscina.

No que segue, vamos nos referir a este "plano de ações" por **procedimento de teste**.

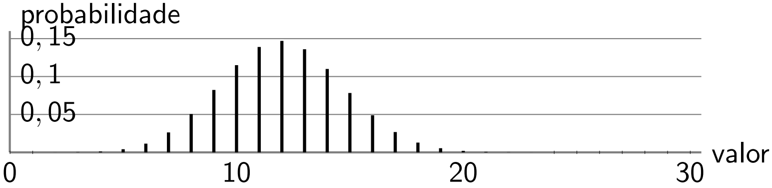
Análises do plano de ações (procedimento de teste):
Entenda: são dois análises!!!! DOIS!!!

(a) O fornecedor acha que $p = 40\%$ e pede que o estatístico avalie o procedimento de inferência no valor de p acordado entre o fornecedor e o administrador, para verificar se esse não é prejudicial ao fornecedor. De acordo com o pedido do fornecedor, o estatístico faz o seguinte: ele imagina (quer dizer, assume) que $p = 40\%$ e calcula as probabilidades dos seguintes dois eventos: o procedimento de inferência concluir que $p = 40\%$ (concordar com a realidade pressumida) e o procedimento de inferência concluir que $p = 30\%$ (descordar da realidade pressumida).

(b) O administrador acha que $p = 30\%$ e pedem que o estatístico avalie o procedimento de inferência no valor de p acordado entre o fornecedor e o administrador, para verificar se esse não é prejudicial ao aministrador. De acordo com o pedido do administrador, o estatístico faz o seguinte: ele imagina (quer dizer, assume) que $p = 30\%$ e calcula as probabilidades dos seguintes dois eventos: o procedimento de inferência concluir que $p = 30\%$ (concordar com a realidade pressumida) e o procedimento de inferência concluir que $p = 40\%$ (descordar da realidade pressumida).

A análise para o fornecedor:

A quantidade de bolas pretas a serem vistas na amostra a ser feita, de tamanho 30, sob o pressuposto que a proporção de bolas pretas na piscina é 0,4 (40%, quer dizer) é $X \sim Bin(30; 0,4)$



Neste caso, a regra decide certo/errado com as respectivas probabilidades:

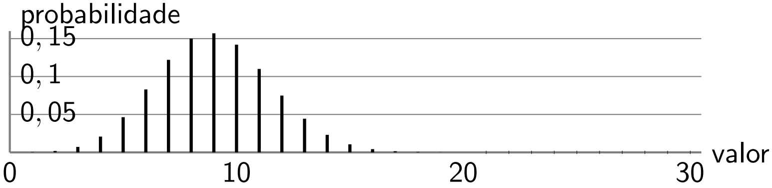
$$\boldsymbol{P}[X \geq 11] \text{ e } \boldsymbol{P}[X \leq 10], \text{ onde } X \sim Bin(30; 0,4)$$

Os valores numéricos são, aproximadamente

$$0,71 \text{ e } 0,29$$

A análise para o administrador:

A quantidade de bolas pretas a serem vistas na amostra a ser feita, de tamanho 30, sob o pressuposto que a proporção de bolas pretas na piscina é 0,3 (30%, quer dizer) é $X \sim Bin(30; 0,3)$



Neste caso, a regra decide certo/errado com as respectivas probabilidades:

$$\boldsymbol{P}[X \leq 10] \text{ e } \boldsymbol{P}[X \geq 11], \text{ onde } X \sim Bin(30; 0,3)$$

Os valores numéricos são, aproximadamente

$$0,73 \text{ e } 0,27$$

Para que serviram os análises? Para poder comparar os resultados! Como

$$0,71 \text{ e } 0,29$$

estão relativamente próximas às

$$0,73 \text{ e } 0,27$$

então o fornecedor e o administrador concordam entre si que a Regra de Decisão não favorece um deles, e partem então para a sua execução.

A contagem deu 10 bolas pretas na amostra. *A regra decide: a proporção populacional de bolas pretas na piscina é 0,3.*

O que o fornecedor fala para seu chefe? *Foi decidio que* $p = 0,3$*. Entretanto, isso não garante que p de fato é* $0,3$*. A decisão foi emetida via execução de uma regra, e a mesma possa errar nos dois sentidos, conforme foi mostrado pelo estatístico na sua análise da regra. Em outras palavras, eu tenho direito de continuar com a minha crença de que a quantidade de bolas pretas na piscina é 40%. É que mesmo com* $p = 40\%$ *há probabilidade de termos 10 ou menos bolas pretas na amostra de tamanho 30. Por mim, é isso que aconteceu. Mas, infelizmente, temos que honrar o acordo com o administrador, e vamos receber dinheiro de acordo a conta feita na base de crença que a proporção de bolas pretas na piscina é 30%.*

O que o administrador fala para seu chefe? *Minha crença de que p é 30% foi confirmada. Vamos pagar para o fornecedor de acordo com a conta feita na base de crença que a proporção de bolas pretas na piscina é 30%. Honestamente falando, ninguém sabe por certo se p é 30% ou 40%. É que deu 10 bolas pretas em 30 bolas retiradas da piscina, e, de acordo com e Regra, decidimos que p é 30%. Esses 10 bolas pretas em 30 retiradas poderiam aparecer tanto no caso* $p = 30\%$ *quanto no caso* $p = 40\%$.

Se o chefe do fornecedor perguntar: "Por que não insistiu que no procedimento de teste, a divisão de valores fosse $0-9$ contra $10-30$?"

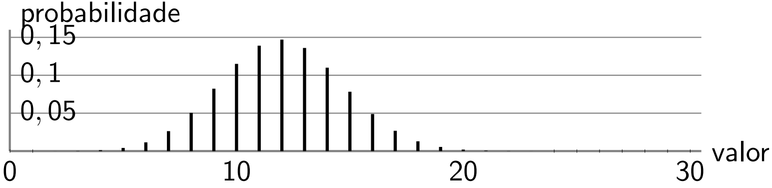
Essa pergunta leva à análise da Regra de Decisão:
Podemos notar que se obtivermos 9 bolas pretas dentro da amostra de 30 bolas, então a proporção amostral fica em $\frac{9}{30}=30\%$, enquanto que se obtivermos 12, então a proporção amostral fica em $\frac{12}{30}=40\%$.

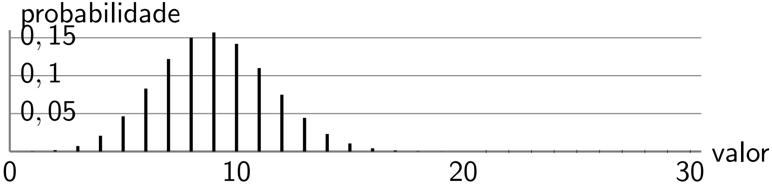
Isto sugere o seguinte plano de ações:

- caso obtenha-se 9 bolas pretas dentro da amostra de 30 bolas, decidir-se-á que então a proporção populacional é 30%;
- enquanto que caso obtenha-se 12 bolas pretas, então decidir-se-á que a proporção populacional é 40%.

Por que então, o procedimentos de teste está diferente?

A Regra de Decisão surge de dois princípios: (1) a máxima verossimilhança, e (2) a relativa igualdade das probabilidades para o acerto e o erro nos dois mundos definidos por dois pressupostos.





Se a divisão definida pela regra for $0 - 9$ contra $10 - 30$, então as probabilidades seriam

$$0.8237135 \text{ e } 0.1762865 \text{ no mundo } p = 40\%$$

e

$$0.5888087 \text{ e } 0.4111913 \text{ no mundo } p = 30\%$$

O administrador não concordaria com essa regra

Com isso julgamos que a divisão (mais que 11 contra menos que 10) é justa, pois as probabilidades 0,71/0,29 e 0,73/0,27 são próximas.

Dada uma amostra e esta nos dê 10 bolas pretas. Decidimos que há 30% de bolas na piscina.

Se alguém perguntar: "Está garantido que são 30%?" Nossa resposta será: "Não. "

Teoria geral

O exercício anterior é um exemplo de problema que foi resolvido pelo método chamado "teste de hipóteses". No exemplo, ambas as hipóteses eram precisas, quer dizer cada uma alegava que a proporção populacional de bolas pretas na piscina era um valor específico. Este não é o único caso. Durante nosso curso, vou ensinar como tratar mais dois casos, além deste que são: quando uma hipótese só é precisa, e quando ambas as hipóteses são imprecisas.

Os problemas dos três tipos, de acordo com o enunciado acima, serão tratados pelo **método de teste de hipóteses**. Abaixo, descrevo o significado disto, quer dizer, as etapas que se espera serem executadas por você quando recebe tal solicitação.

Teoria geral

Na **primeira etapa**, você deve identificar que o cerne do problema é escolher entre uma de duas alternativas. A presença de duas alternativas concorrentes (ou confrontantes) é a característica principal dos problemas de teste de hipóteses.

Se não houverem alternativas confrontantes, o problema admite abordagem por outros métodos estatísticos e surge a questão de comparação dos métodos aplicáveis. Por outro lado, problemas sem alternativas confrontantes podem ser alterados por introdução artificial de alternativa confrontate àquela que representa a questão na formulação original. Nenhum destes dois casos surgirá nos exercícios do curso.

As alternativas são chamadas **hipóteses**. Até um certo momento do curso, vou me referir a estas como 1-a e 2-a hipótese. Porém mais tarde usaremos a nomenclatura tradicional: **hipótese nula** e **hipótese alternativa**.

Teoria geral

Na **segunda etapa**, você deve identificar a quantia que será observada e que pode ser usada para escolher qual das duas hipóteses é válida e qual não.

Em todos os exercícios do presente tema, eu vou descrever – com a devida precisão e cuidado – a amostragem que será feita e a quantia que será observada nesta amostragem. Em caso reais, o método de amostragem e a quantia a ser obsrevada na amostragem são sugeridos pelo estatístico. Este trabalho não será sua tarefa em nenhum exercício do curso.

Teoria geral

Na **terceira etapa**, você deve analisar a distribuição da quantia observada. Preste atenção: você deve fazer este trabalho duas vezes, ou seja, uma vez assumindo que a hipótese 1-a seja verdadeira, e a outra vez assumindo que a hipótese 2-a seja verdadeira.

Preste atenção: assumir que uma hipótese seja verdadeira (para o fim de fazer certas contas) não significa aceitar tal hipótese como a verdade. A aceitação é uma das úlitmas etapas do método.

Teoria geral

Na **quarta etapa**, você separa em dois conjuntos todos os valores possíveis da quantia observada. Os conjuntos tem o seguinte sentido:

- se o valor da quantia observada cair no 1° conjunto, terá que ser aceita como verdadeira a 1-a hipótese;
- se o valor da quantia observada cair no 2° conjunto, terá que ser aceita como verdadeira a 2-a hipótese.

Para a determinação dos conjuntos usam-se as distribuições derivadas da terceira etapa.

A quantia observada e a separação de todos os seus valores possíveis por dois conjuntos chama-se **o procedimento de teste** ou **regra de decisão**.

Teoria geral

A **quinta etapa** parece como uma continuação da terceira. Nesta, você faz duas coisas:

- você assume que a hipótese 1-a seja verdadeira e calcula a probabilidade que a regra de decisão leve ao fato de que esta hipótese é verdadeira, e calcula também a probabilidade que a regra decida que esta hipótese é falsa;
- você assume que a hipótese 2-a seja verdadeira e calcula a probabilidade que a regra de decisão leve ao fato de que esta hipótese é verdadeira, e calcula também a probabilidade que a regra decida que esta hipótese é falsa.

Teoria geral

A seguinte tabela esclarece as ações da quinta etapa:

	A regra de decisão decide que	
	hipótese 1-a é verdade	hipótese 2-a é verdade
A verdade está com a hipótese 1-a	acertou	errou
A verdade está com a hipótese 2-a	errou	acertou

Teoria geral

Na Teoria Estatística, uma das hipóteses chama-se **nula** e outra chama-se **alternativa**.

- Ao invés de dizer "a hipótese nula" escreve-se H_0 ou H.
- Ao invés de dizer "a hipótese alternativa" escreve-se H_A ou A.
- São dois pares de notações: H_0 - H_A e H - A.

No caso quando as duas hipóteses são precisas, a atribuição de nomes não vai fazer diferença.

No caso quando uma ou ambas são imprecisas, a atribuição de nomes segue uma regra. É claro que a decisão não será alterada pela mudança de nomes. É que há outros termos que são vinculados à atribuição. Vejamos isto abaixo.

Teoria geral

A tabela abaixo introduz os termos **erro tipo I** e **erro tipo II**.

	A regra de decisão decide que a hipótese nula é verdade	A regra de decisão decide que a hipótese alternativa é verdade
A verdade está com a hipótese nula	acerto sem nome	erro tipo I
A verdade está com a hipótese alternativa	erro tipo II	acerto sem nome

Ou se preferir, a definição pode ser assim:

- **Erro tipo I** ocorre quando a hipótese nula é verdadeira, mas a regra de decisão decide que ela é falsa.
- **Erro tipo II** ocorre quando a hipótese alternativa é verdadeira, mas a regra de decisão decide que ela é falsa.

Teoria geral

Ainda mais:

- A probabilidade do erro tipo I chama-se **o nível de significância** do teste. Este nível é denotado por α.
- A probabilidade do erro tipo II denota-se por β; e $1-\beta$ chama-se **o poder do teste**.

E por fim:

A região dos valores da quantia observada que faz a regra de decisão decidir contra a hipótese nula chama-se **região crítica**.

O Exemplo das bolinhas contado em termos da Teoria Geral

Se chamarmos:

$p = 40\%$ por hipótese nula,

$p = 30\%$ por hipótese alternativa,

então a regra de decisão sugerida tem:

o nível de significância de 0,29,

o poder de 0,73,

a região crítica $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$

e com o resultado da amostra:

10 bolas pretas em 30 bolas da amostra,

foi aceita como verdadeira a hipótese alternativa (foi aceito que $p = 0,3$).

O Exemplo das bolinhas contado em termos da Teoria Geral

Se chamarmos:

$p = 30\%$ por hipótese nula,

$p = 40\%$ por hipótese alternativa,

então a regra de decisão sugerida tem:

o nível de significância de 0,27,

o poder de 0,71,

a região crítica $\{11, 12, 13, \ldots, 29, 30\}$

e com o resultado da amostra:

10 bolas pretas em 30 bolas da amostra,

foi aceita como verdadeira a hipótese nula (foi aceito que $p = 0,3$).

O Exemplo das bolinhas contado em termos da Teoria Geral

É muito importante observar que no caso de duas hipóteses precisas, a troca de nomes (nula/alternativa) causa uma reviravolta de outros nomes, mas a decisão final não muda (troca de nome, sim, mas fica a mesma). Também, vale observar que:

- se a decisão está sendo tomada em função do número de bolas pretas observado na amostra então a região crítica é $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$ ou $\{11, 12, 13, \ldots, 29, 30\}$,
- se a decisão está sendo tomada em função da proporção de bolas pretas observada na amostra então a região crítica é $[0;\ 10/30]$ ou $[11/30;\ 1]$.

O caso quando uma só hipótese é precisa

Exemplo: "a honestidade de uma moeda". Tomamos uma moeda.

Queremos saber se esta é honesta ou não, ou seja, queremos saber se ao ser lançada, a probabilidade da moeda dar "cara" é 0,5 ou não. Podemos lançar esta moeda 10 vezes. (Este 10 é só para fazer com que o tamanho de amostra esteja definido por natureza do problema, caso que acontece frequentemente na prática.)

O caso quando uma só hipótese é precisa

Vamos abordar este problema pelo método de teste de hipóteses.

Primeira etapa: Observe, que temos duas alternativas entre as quais devemos escolher:

a moeda é honesta, e

a moeda é desonesta.

Na teoria sobre o teste de hipóteses, estas chamam-se **hipóteses**. Então temos:

1-a hipótese: *a moeda é honesta*, e

2-a hipótese: *a moeda é desonesta*.

Usando a notação p para a probabilidade da moeda dar cara num lançamento, podemos re-escrever assim:

1-a hipótese: $p = 0,5$ e

2-a hipótese: $p \neq 0,5$, ou em termos afirmativos, $p \in (0,1) \setminus \{0,5\}$, quer dizer, qualquer número no intervalo $(0,1)$, menos $0,5$.

O caso quando uma só hipótese é precisa

A última maneira de escrever as hipóteses deixa clara o significado do termo **hipótese exata**.

No caso, a 1-a hipótese é exata enquanto que a 2-a não é.

Nos casos deste tipo de problema, reina a seguinte regra:
aquela das hipóteses que é exata recebe o nome NULA, e a outra recebe o nome ALTERNATIVA.

Então, no nosso exemplo, temos:

hipótese nula: $p = 0,5$ e

hipótese alternativa: $p \neq 0,5$.

O caso quando uma só hipótese é precisa

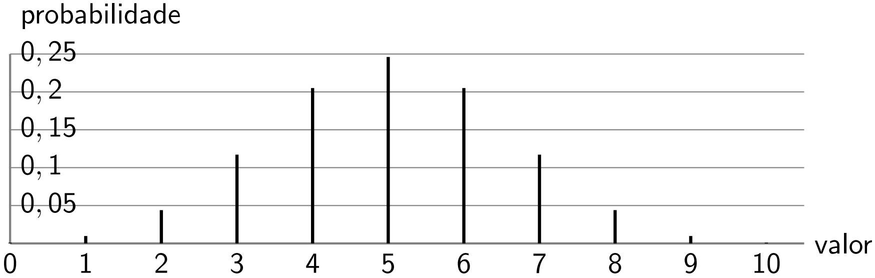
Na **segunda etapa** da solução, você precisa determinar a quantia a ser observada. O enunciado disse que a moeda pode ser lançada 10 vezes. É natural observarmos o número de caras nestes lançamentos e tomarmos a decisão (acerca de qual das duas hipóteses é verdade) com base no valor desta quantia.

O caso quando uma só hipótese é precisa

Na **terceira etapa** da solução você precisa achar a distribuição da quantia observada; você precisa fazer isto duas vezes: uma vez assimundo que H é verdade, e a outra, assumindo que A é verdade.

Assumimos que H é verdade. Isto é, assumimos que $p = 0,5$ (p foi introduzido como a notação para a probabilidade da moeda dar "cara" num lançamento). Neste caso, a distribuição do número de "caras" a serem vistas em 10 lançamentos é Binomial$(10; 0,5)$. Veja o desenho desta distribuição na transparência a seguir.

O caso quando uma só hipótese é precisa



Valores da distribuição binomial com n=10 e p=0,5:

0.0009765625	0.0097656250	0.0439453125	0.1171875000
0.2050781250	0.2460937500	0.2050781250	0.1171875000
0.0439453125	0.0097656250	0.0009765625	.

O caso quando uma só hipótese é precisa

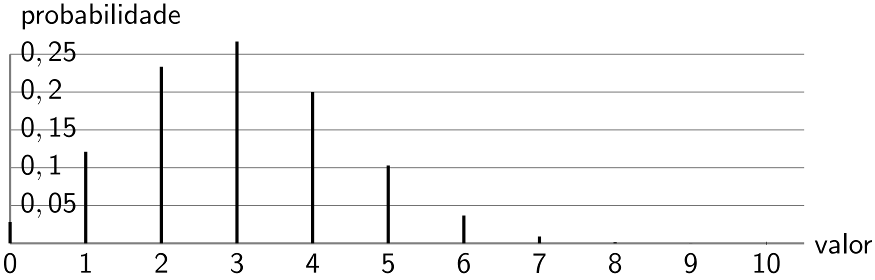
Continuamos na **terceira etapa**. Agora devemos assumir que A (a hipótese alternativa) é verdade e achar a distribuição da quantia observada.

Neste caso, a distribuição do número de "caras" a serem vistas em 10 lançamentos também é Binomial, mas o valor preciso de p desta distribuição é desconhecido (pois a hipótese não especifica o valor; aliás, é por isto que essa chama-se imprecisa).

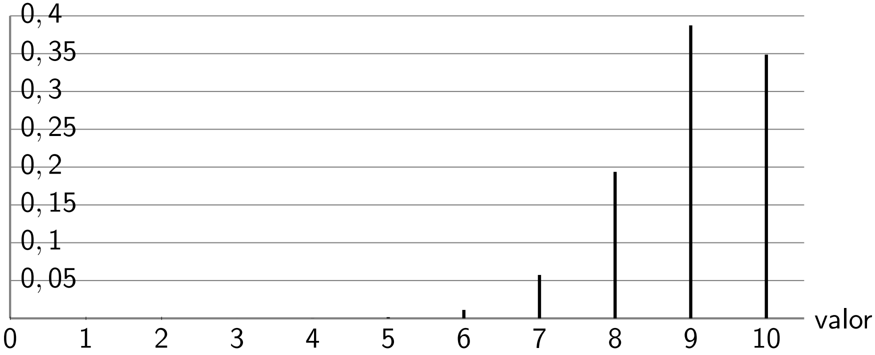
Sobre a distribuição da qual estamos interessados, podemos dizer só coisas genéricas, do tipo:

- se p for $0,3$, a distribuição seria assim (veja as transparências a seguir);
- se p for $0,9$, a distribuição seria assim (veja as transparências a seguir);
- etc.

O caso quando uma só hipótese é precisa



O caso quando uma só hipótese é precisa



O caso quando uma só hipótese é precisa

Na **quarta etapa** da solução, devemos construir a região crítica. Especificamente falando, devemos dividir o conjunto

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

em dois subconjuntos: um, chamado de região crítica, e outro que é o complementar desta região (observe: este é o conjunto de todos os valores possíveis da quantia observada).

O sentido de região critica é: se o valor da quantia observada cair nesta região, rejeitaremos H, quer dizer, respondemos: o resultado mostrou, de acordo com a regra de decisão por nos construída, que a hipótese nula não é verdade, ou seja, que p não é $0, 5$.

Por outro lado, se o valor da quantia observada cair fora da região crítica, a gente aceitará H, quer dizer, a gente responderá: o resultado mostrou, de acordo com a regra de decisão por nos construida, que a hipótese nula é verdade, quer dizer, que $p = 0, 5$.

O caso quando uma só hipótese é precisa

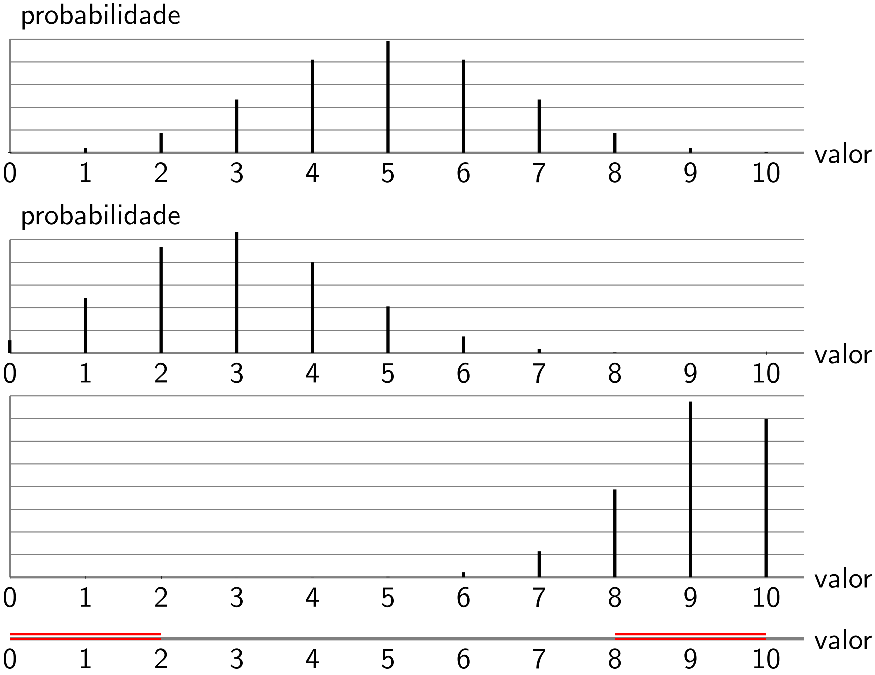
A divisão do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dá-se pelo princípio de máxima verossimilhança: "ao observar um acontecimento que pode ser causado por duas fontes, acredito naquela das duas que gera este acontecimento com a maior probabilidade".

Olhando as três distribuições, decide-se que a região crítica deve ser nos extremos do conjunto.

Uma das sugestões possíveis é:

$$R_C = \{0, 1, 2\} \cup \{8, 9, 10\}$$

Veja a transparência seguinte para a motivação. Nela, a região crítica está em vermelho.


probabilidade
valor
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
probabilidade
valor
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
valor
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
valor
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

O caso quando uma só hipótese é precisa

Uma outra sugestão seria:

$$\{0, 1\} \cup \{8, 9\}$$

Qual das duas é melhor? E é fácil ver que há outras. Qual será a melhor de todas as alternativas possíveis?

No momento, não há critério para a seleção. Mas quando você aprender o significado do nível de significância (ensinado na aula) e da função do poder de teste (não ensinado), você poderá usar estes como critério da seleção. Nem sempre há uma melhor escolha. Podem ser várias. As vezes, a pessoa, que deseja o teste, tem critérios para a escolha do nível de significância e do poder de teste (por exemplo, os limites para o risco de investimento). Neste caso, os valores solicitados determinam a região crítica.

O caso quando uma só hipótese é precisa

Na **quinta etapa** devemos calcular as probabilidades dos erros. Novamente, o fato da hipótese alternativa ser imprecisa faz com que a probabilidade do erro tipo II seja incalculável. Então, vamos calcular só a do erro tipo I. Recordo: é a probabilidade da regra de decisão de errar quando a verdade está com a hipótese nula, quer dizer, a probabilidade da regra de decisão rejeitar a hipótese nula enquanto na realidade, ela é verdadeira. Isto possui a seguinte expressão matemática:

$$\boldsymbol{P}\left[X \in R_C\right] \text{ onde } X \sim Bin(10;\, 0,5)$$

ou

$$\boldsymbol{P}\left[X = 0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 8 \text{ ou } 9 \text{ ou } 10\right]$$

onde $X \sim Bin(10;\, 0,5)$.

O caso quando uma só hipótese é precisa

Eis a tabela da distribuição da variável aleatória binomial com $n = 10$ e $p = 0,5$.

k	$\boldsymbol{P}[X = k]$	k	$\boldsymbol{P}[X = k]$
0	0.0009765625	10	0.0009765625
1	0.0097656250	9	0.0097656250
2	0.0439453125	8	0.0439453125
3	0.1171875000	7	0.1171875000
4	0.2050781250	6	0.2050781250
5	0.2460937500		

De onde conclui-se que

$$\boldsymbol{P}\left[X \in R_C\right] = 0.109375$$

isto é, α, o nível de significância do teste é $0,109375$ (aproximadamente 11%).

O caso quando uma só hipótese é precisa

Neste, o trabalho da construção acaba.

Suponha que fomos fazer uma amostra e observamos 7 caras em 10 lançamentos. Então, diz-se que o teste de hipóteses, cujo nivel de significância era 11%, aceitou a hipótese que a moeda é honesta. Ou: o resultado 7 caras em 10 lançamentos aceitou que a moeda é honesta ao nível de significância de 11%.

Este tal nível de significância é a indicação que poderiamos ter errado; para os que entenderam as etapas de construção acima explicadas, o valor 11% significa que o possível erro tinha a probabilidade de acontecer em 11% das vezes.

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

Exemplo. Uma agência governamental está encarregada de fiscalizar a contaminação de um certo produto alimentício, através da análise de uma amostra dos pacotes desse produto. Uma porcentagem de contaminação de 7% é considerada tolerável. Se a porcentagem de contaminação for maior que este valor o produtor deverá ser autuado. Uma norma dessa agência estabelece que, se no exame de 100 pacotes desse produto forem detectados pelo menos 12 pacotes contaminados, então a fábrica deve ser multada.

(a) Defina as hipóteses estatísticas adequadas ao problema.
(b) Quais são os significados dos erros tipo I e tipo II para o problema?
(c) Qual é a região crítica escolhida pela agência?
(d) Qual é o nível de significância correspondente à região crítica escolhida?
(e) Qual será a decisão da agência se forem observados 10 pacotes contaminados? Dê a resposta completa, quer dizer, as palavras "ao nível de significância" devem estar presentes na resposta; dê a interpretação a esta palavras.

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

É óbvio que as alternativas conflitantes aqui são:

1-a hipótese: $p \leq 7\%$; e

2-a hipótese: $p > 7\%$.

A 1-a é o que a diretoria do produtor está alegando. A agência, por sua vez, precisa verificar se esta alegação é verdadeira ou não; por isto que a 2-a alternativa é a afirmação complementar à 1-a.

Dentre as alternativas podemos perceber que nenhuma é precisa. Para dar a solução, faz-se a seguinte substituição:

1-a hipótese: $p = 7\%$; e

2-a hipótese: $p > 7\%$.

Após a substituição, segue-se das regras formuladas acima que a distribuição dos nomes é como se segue:

hipótese nula (H): $p \leq 7\%$; e

hipótese alternativa (A): $p > 7\%$.

Com isto, todos os outros nomes são distribuídos.

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

Observação: É óbvio que 7% de 100 dá 7, o que sugere que é 7 o número de pacotes contaminados a serem encontrados em 100 pacotes testados na condição quando a produção enquadra-se nos limites toleráveis. Tal sugestão é aceitável pela nossa intuição, mas não pela lógica da Teoria de Probabilidades. Isto por que apesar de 7 corresponder à média de pacotes contaminados em 100 testados, o número de tais pocotes numa amostra não tem obrigação a coincidir com a média. Então o norma seguida pela agência elevou 7 a 11 com o intuito de não punir a produção correta só por causa do desvio do número amostral da média. Esta elevação é tal de "tolerância da regra de decição às flutuações aleatórias". Vale discutir a razão pela qual esta tal de tolerânica elevou 7 para 11 em véz de baixar 7 para 3.

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

Região crítica $\{12, 13, 14, \ldots, 100\}$.

Assumindo a validade da hipótese nula, a quantidade de pacotes contaminados na amostra de 100 pacotes tem distribuição $Bin(100;\ 0,07)$.

O nível de significância do teste é a probabilidade da regra de decisão apontar a hipótese nula como falsa enquanto que esta é verdadeira. Em símbolos matemáticos:

$$\alpha = \boldsymbol{P}[X \geq 12] \text{ onde } X \sim Bin(100;\ 0,07)$$

Usando a tabela dos valores desta distribuição binomial (veja a transparência abaixo), conclui-se que

$$\alpha = 1 - \boldsymbol{P}[X \leq 11] = 1 - 0.9530996 \approx 0,05(5\%)$$

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

0	7.051717e-04	20	1.287502e-05	...	...		
1	5.307744e-03	21	3.691763e-06	...	...		
2	1.977563e-02	22	9.978225e-07	...	...		
3	4.862394e-02	23	2.547036e-07	...	...		
4	8.875176e-02	24	6.150773e-08	...	...		
5	1.282606e-01	25	1.407403e-08	...	...		
6	1.528554e-01	26	3.055775e-09	...	...		
7	1.544990e-01	27	6.303829e-10	...	...		
8	1.351866e-01	28	1.237042e-10	...	...		
9	1.040146e-01	29	2.311713e-11	...	...		
10	7.124438e-02	30	4.117998e-12	...	...		
11	4.387484e-02	31	6.999026e-13	...	...		
12	2.449285e-02	32	1.135931e-13	...	...		
13	1.247940e-02	33	1.761821e-14	...	...		
14	5.837140e-03	34	2.613201e-15	...	...		
15	2.518966e-03	35	3.709060e-16	...	...		
16	1.007248e-03	36	5.040687e-17	...	...		
17	3.746122e-04	37	6.562708e-18	...	98	2.826045e-110	
18	1.300177e-04	38	8.189458e-19	...	99	4.297233e-113	
19	4.223552e-05	39	9.799351e-20	...	100	3.234477e-116	

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

Para n grande, podemos aproximar $Bin(100;\, 0,07)$ pela normal e fazer as contas com menor esforço. Prosseguimos com os cálculos auxiliares:

$$X \sim Bin(100;\, 0,07) \implies \boldsymbol{E}[X] = 100 \times 0,07,$$

$$\mathrm{Var}[X] = 100 \times 0,07 \times 0,93 = 6,51$$

Consequentemente, a variável aleatória normal que aproxima X tem a distribuição $\mathcal{N}(7; 6,51)$. Naquilo que nos interessa, a aproximação torna a ter a seguinte cara:

$$\boldsymbol{P}[X \geq 12] \approx \boldsymbol{P}[Y \geq 12], \quad \text{onde} \quad Y \sim \mathcal{N}(7; 6,51)$$

A fim de calcular o resultado numérico, faremos a padromização, isto é, a passagem para a variável aleatória Normal Padrão denotada por Z na exposição dessa passagem que apresento em seguida:

O caso quando nenhuma hipótese é precisa

$$P[Y \geq 12] = P\left[Z \geq \frac{12-7}{\sqrt{6,51}}\right] = P[Z \geq 1,9596] \approx$$
$$\approx P[Z \geq 1,96] = 1 - P[Z < 1,96] = 1 - 0,9750 = 0,025$$

onde 0 valor 0,9750 foi achado na Tabela da Distribuição de Normal Padrão; é o valor correspondente ao limiar $z = 1,96$.
O resultado obtido significa que o nível de significância do teste calculado com auxílio da aproximação de binomial por normal ficou no valor de $0,025$. Ele é diferente do valor $0,05$ obtido anteriormente por cálculos exatos; a diferença explica-se justamente pelo fato de temos usando uma aproximação. Quanto à sua pergunta acerca quando é permitido usar a aproximação, aviso-lhe que em exercícios de listas e em questões de provas será especificado explicitamente se a aproximação seja permitida ou não.