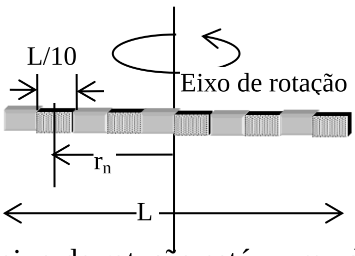
Problema 20, lista 2. Calcule o momento de inércia para:

a) Uma vareta homogênea de comprimento L e massa M; b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro; c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro; d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo; e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro; f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.



a) Resolução na pagina 205 RHK 5tqa Ed. Ou 286 6ta Ed. Supondo a vareta com um comprimento L, se a dividirmos em 10 porções, cada pedaço terá um comprimento igual L/10, e massa M/10. Se numerarmos os pedaços de esquerda a direita como 1,2, etc, cada um deles estará a uma distância r_n do eixo de rotação.

Se considerarmos que o centro de massa do primeiro pedaço à esquerda do eixo de rotação está a uma distância 0,5xL/10

$r_5=r_6=0{,}5.0{,}1L=0{,}05L$; $r_4=r_7=r_5+L/10=0{,}05L+0{,}1L=0{,}15L$; $r_3=r_8=r_5+2L/10=0{,}05L+0{,}2L=0{,}25L$; $r_2=r_9=r_5+3L/10=0{,}05L+0{,}3L=0{,}35L$; $r_1=r_{10}=r_5+4L/10=0{,}05L+0{,}4L=0{,}45L$.

Desenvolvendo a soma dos 10 pedaços:

$$I=r_1{}^2\delta m_1+r_2{}^2\delta m_2+\ldots+r_{10}{}^2\delta m_{10}=$$

$$(0{,}1M)(0{,}45L)^2+(0{,}1M)(0{,}35L)^2+(0{,}1M)(0{,}25L)^2+(0{,}1M)(0{,}15L)^2+(0{,}1M)(0{,}05L)^2+\ldots$$

,iguais termos para o lado direito, então: $I=0{,}0825ML^2$. Este resultado pode ser re-feito dividindo a barra em 20, 30 ou n pedaços. Como já sabemos integrar, vamos imaginar que cada pedaço corresponde a um diferencial de massa dm.

Dessa maneira: $I=\lim\limits_{\delta m_n\to 0}\sum r_n^2\delta m_n=\int r^2dm$ A integração é efetuada sobre todo o volume do objeto mas podemos efetuar algumas simplificações.

Sabendo que a densidade, $\rho=M/V\Rightarrow M=\rho.V$. Se a vareta gira em torno a um eixo perpendicular, como nosso caso, escolhendo um elemento de volume arbitrário de massa dm, posicionado a uma distância x do eixo, a massa desse elemento é igual a massa específica (massa por unidade de volume) ρ, multiplicada pelo elemento de volume dV, $dm=\rho.dV$. O elemento de volume é igual a área multiplicada pela sua espessura dx:

$dV=Adx\Rightarrow dm=\rho dV=\rho Adx$. O volume da vareta pode ser interpretado como o produto da área pelo comprimento: V=A.L desta maneira a expressão anterior fica:

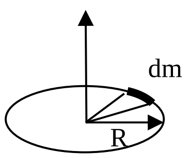
$$I=\int r^2dm=\int r^2\rho\,dV=\int x^2\frac{M}{AL}Adx=\frac{M}{L}\int x^2dx\,,$$

Como x = 0 no meio da vareta, os limites de integração são de x = –L/2 a x = +L/2. Desta maneira a inércia rotacional é:

$$I=\frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2}x^2dx=\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-L/2}^{+L/2}=\frac{M}{L}\frac{L^3}{8.3}-\left(-\frac{M}{L}\frac{L^3}{8.3}\right)=2\frac{M}{L}\frac{L^3}{24}=\frac{M\quad L^2}{12}.$$

Mandar eles obter I para a extremidade da vareta.

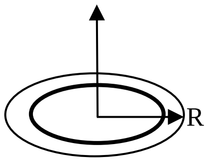
b) Um aro circular que gira em torno a um eixo perpendicular ao seu plano passando pelo próprio centro.



Podemos dizer que cada elemento de massa do anel está a uma distância R do eixo de rotação, então:

$$I=\int r^2\,dm=R^2\int dm=R^2M\,.$$

c) Um disco homogêneo em relação a o eixo perpendicular ao seu plano e passando pelo próprio centro.

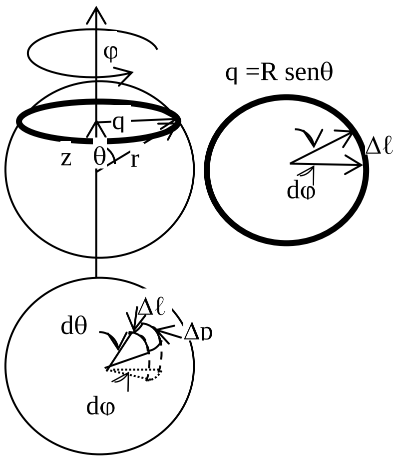


No caso de um disco homogêneo, toda a massa está distribuída entre r = 0 e r = R e não concentrada em r = R como no caso anterior. Cada elemento de massa dm é um anel infinitesimal de raio r e espessura dr. O momento de inércia desse elemento de massa é r^2dm e a área de cada elemento de massa é dA=2π r dr, definindo a densidade por unidade se superfície ρ = (massa por unidade de superfície)= M/A a massa do elemento M= ρA, mas A=πR^2 assim: $dm = \rho dA = \frac{M}{A}dA = \frac{M}{\pi R^2}2\pi r dr$, substituindo na fórmula:

$$I = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \frac{M}{A} 2\pi r dr = 2\pi \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^3 dr = 2\frac{M}{R^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \frac{M}{R^2}\frac{R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2$$

d) Um cilindro homogêneo em relação ao próprio eixo.
Imaginemos que o cilindro seja constituído por discos de massa dm e momento de inércia $dmR^2/2$ deduzido no caso anterior.
O momento de inércia será a integral desse elemento:

$$I = \int \frac{1}{2}dmR^2 = \frac{1}{2}R^2\int dm = \frac{1}{2}MR^2 .$$



e) Uma casca esférica delgada em relação a um diâmetro.
Consideraremos um elemento de massa *dm*, que gira em relação a um diâmetro. Cada elemento de massa *dm* variará em φ de $\varphi = 0$ até $\varphi = 2\pi$, formando um anel, e a distância *q* desse elemento de massa até o eixo de rotação variará de $q = R$ até $q = 0$; mas
$q = R\ sen\ \theta$ (1) portanto a variável de integração passa a *ser* θ que varia de *0* a π.

Se densidade de massa por unidade de área é: $\rho = \frac{M}{A}$; sendo $A = 4\pi\ R^2$ a massa da casca esférica será: $M = \rho A$ e o diferencial de massa, $dm = \rho\ dA$ pode ser representada pela pequena área da fig. é $\rho dA = \rho\, dp \times d\ell$. Pela definição de ângulo em radianos $\theta = \frac{S}{R}$ de onde $\Delta\theta = \frac{arco}{raio} = \frac{\Delta p}{R} \Rightarrow \Delta p = R\Delta\theta \Rightarrow dp = Rd\theta$. Por outro lado, $\varphi = \frac{S}{R}$ como S equivale a longitude da circunferência de raio r quando φ fecha o círculo, podemos fazer de $S = \ell$ de maneira que

$\Delta\varphi = \frac{\Delta\ell}{q} = \frac{\Delta\ell}{R\,sen\theta} \Rightarrow \Delta\ell = R\,sen\theta\,\Delta\varphi$. Assim,

$$dm = \rho dA = \rho\, dp \times d\ell = \rho R\Delta\theta \times R\,sen\theta\,\Delta\varphi = \rho R^2 sen\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Assim, como $I = \int q^2\ dm$, substituindo pelas expressões acima e rearranjando:

$$I = \rho\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2\ sen^2\theta\, R^2 sen\theta\, d\theta = \rho\, 2\pi\, R^4 \int_0^{\pi} sen^2\theta\, d(-\cos\theta)$$

chamando $\cos\ \theta = x \rightarrow d(\cos\ \theta) = dx$; por outro lado como $sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1 \rightarrow sen^2\ \theta = 1 - cos^2\ \theta$.
Com a consequente mudança nos limites de integração já que -cos θ varia de -1 a 1. Devemos então

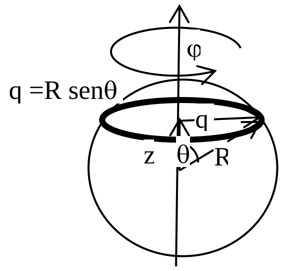
mudar o sinal do coseno e trocar os limites de integração. Substituindo estas expressões na equação acima:

$$I = \rho 2\pi R^4 \int_{\pi}^{0} \left(1-\cos^2\theta\right) d\left(\cos\theta\right) = \rho 2\pi R^4 \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx =$$

$$= \rho 2\pi R^4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]\Bigg|_{-1}^{1} = \rho 2\pi R^4 \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)}{3} \right) \right] =$$

$$= \rho 2\pi R^4 \left(\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) \right) = \rho 2\pi R^4 \frac{4}{3} = \frac{2\pi R^4 \frac{4}{3} M}{4\pi R^2} = \frac{2}{3} MR^2$$

OUTRA FORMA, integrando anéis.



$I_{aro} = R^2 M$,

$$I_{esf} = \int dI_{aro} = \int q^2 dm = \int R^2 sen^2\theta \; dm$$

$$q = R\, sen\,\theta$$

$$\rho = \frac{M}{A} \Rightarrow M = \rho A \text{ e } \quad dm = \rho\, dA$$

A área pode ser considerada como o comprimento do anel de raio q e espessura dq, então: $dm = \rho 2\pi q\, dq$

Pela definição de ângulo em radianos, $\theta = \dfrac{arco}{Raio}$ e $\Delta\theta = \dfrac{\Delta q}{R} \Rightarrow \Delta q = R\Delta\theta \Rightarrow dq = Rd\theta$.

Então, a inércia rotacional da esfera fica:

$$I_{esf} = R^2 \int sen^2\theta\, \rho 2\pi R\, sen\,\theta\, dq = R^3 \rho 2\pi \int sen^2\theta \; R\, sen\,\theta\, dq = R^3 \rho 2\pi R \int_0^{\pi} sen^2\theta \; sen\,\theta \; d\theta =$$

$$= R^4 \rho 2\pi \int_0^{\pi} sen^2\theta \; d\left(-\cos\theta\right)$$

chamando $\cos\theta = x \rightarrow d(\cos\theta) = dx$; por outro lado como $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.
Com a consequente mudança nos limites de integração já que -cos θ varia de -1 a 1. Devemos então mudar o sinal do coseno e trocar os limites de integração. Substituindo estas expressões na equação acima:

$$I_{esf} = R^4 \rho 2\pi \int_0^{\pi} \left(1-\cos^2\theta\right) d\left(\cos\theta\right) = R^4 \frac{M}{4\pi R^2} 2\pi \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right) dx = \frac{MR^2}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{MR^2}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 - \frac{(-1)}{3} \right) \right] = \frac{MR^2}{2} 2 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} MR^2$$

f) Uma esfera maciça em relação a um diâmetro.

$\rho = M/V \rightarrow M=\rho V$ área do disco = πq^2 $\Big\}$ $dV= \pi q^2 dz$

$dm = \rho dV$ altura do disco = dz

volume total da esfera = $4/3\ \pi R^3$

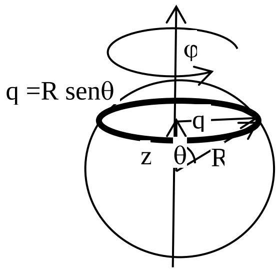
substituindo, $dm = \rho \pi q^2 dz$

Se $I = \int r^2 dm$ vemos que a integral envolve duas variáveis, q e z.

Fazendo $I = \int_V dI$ onde dI é a inércia rotacional do disco, considerando um disco com uma massa dm,

$I_{disco} = \frac{1}{2} M\ r^2 \Rightarrow dI =$ inércia rotacional de um disco de raio q $= \frac{1}{2} dm\ q^2$

Nos valendo da simetria dos dois hemisférios,



$$I = 2\int_{hemisfério} dI \quad = 2\int_{hemisfério} \frac{1}{2} q^2 dm \quad = \int_{hemisfério} q^2 \rho \pi\ q^2 dz =$$

$$= \rho \int_{hemisfério} \left(q^2\right)^2 \pi\ dz = \rho \pi \int_{hemisfério} \left(q^2\right)^2 dz$$

Nos valendo da igualdade: $q^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow q^2 = R^2 - z^2$, substituindo na integral,

$$I = \rho \pi \int_0^R \left(q^2\right)^2 dz = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R \left(R^2 - z^2\right)^2 dz = \rho \pi \int_0^R \left(R^4 + z^4 - 2R^2 z^2\right) dz =$$

$$= \rho \pi \left(R^4 z + \frac{z^5}{5} - \frac{2R^2 z^3}{3} \right)\Bigg|_o^R = \rho \pi \left(R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3} \right) = \rho \pi \frac{\left(15R^5 + 3R^5 - 10R^5\right)}{15}$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \pi \frac{8R^5}{15} = \frac{2MR^2}{5}$$